10. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1970/1971

Aufgaben und Lösungen

10. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 101221:

Es sind alle geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (1)$$
$$x^6 + y^6 = \frac{7}{16} \qquad (2)$$

erfüllt ist.

Aufgabe 101222:

Der Binominalkoeffizient $\binom{a}{k}$ wird für jede beliebige reelle Zahl a und jede natürliche Zahl $k \geqslant 1$ durch

$$\binom{a}{k} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \dots [a-(k-2)] \cdot [a-(k-1)]}{k!}$$

definiert.

a) Untersuchen Sie, ob auch in jedem hier genannten Fall für a und k die für ganzzahlige $a \geqslant k$ aus dem Pascalschen Dreieck bekannte Beziehung $\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1}$ gilt!

b) Zeigen Sie, daß für $k > 2$ $\quad \binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(2k-3)!}{2^{2k-2} \cdot k! \cdot (k-2)!} \cdot (-1)^{k+1}$ gilt!

Aufgabe 101223:

Die ersten Zeilen eines (beliebig fortsetzbaren) dreieckigen Zahlenschemas lauten

Zeile 0	1
Zeile 1	1 1 1
Zeile 2	1 2 3 2 1
Zeile 3	1 3 6 7 6 3 1
......	....

Die allgemeine Vorschrift zur Bildung dieses Zahlenschemas lautet:

Die einzige Zahl in der Zeile 0 sei die Zahl 1. Jede weitere Zahl sei gleich der Summe aus der unmittelbar über ihr stehenden Zahl und deren beiden Nachbarzahlen, wobei links und rechts von den Rändern fehlende Zahlen durch Nullen ersetzt zu denken sind.

Es ist für jede natürliche Zahl n zu beweisen, daß in diesem Schema die Summe s_n aller Zahlen der Zeile n den Wert 3^n hat.

Aufgabe 101224:

Es sei $ABCD$ ein konvexes Tangentenviereck und S der Schnittpunkt seiner Diagonalen, und es seien $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$, $\overline{AC} = e$, $\overline{BD} = f$ und δ die Größe des Winkels $\sphericalangle BSA$.

Beweisen Sie, daß dann $ac - bd = ef \cdot \cos \delta$ gilt!

10. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 101221:

Aus

$$3x^2y^2 = 3x^2y^2(x^2+y^2) + (x^6+y^6-\frac{7}{16}) = (x^2+y^2)^3 - \frac{7}{16} = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

erhält man sofort

$$x^2y^2 = \frac{3}{16} \tag{3}$$

und durch Einsetzen in (1) weiter

$$x^4 - x^2 + \frac{3}{16} = (x^2-\frac{1}{4})(x^2-\frac{3}{4}) = 0 \tag{4}$$

mit den Lösungen

$$x \in \left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

was dann in Verbindung mit (3) die 8 endgültigen Lösungen

$$(x,y) \in \left\{\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)\right\}$$

ergibt.

Aufgeschrieben und gelöst von weird

Lösung 101222:

a) Es ist

$$\binom{a}{k}+\binom{a}{k+1} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-2)][a-(k-1)]}{k!}$$
$$+\frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-1)][a-k]}{(k+1)!}$$
$$= \frac{(k+1)\cdot a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-2)][a-(k-1)]}{(k+1)!}$$
$$+\frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-1)][a-k]}{(k+1)!}$$
$$= \frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-2)][a-(k-1)]}{(k+1)!}\cdot([k+1]+[a-k])$$
$$= \frac{(a+1)a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-2)][a-(k-1)]}{(k+1)!}$$
$$= \binom{a+1}{k+1}$$

b) Es ist

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\left(\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!}$$
$$= \frac{1\cdot(1-2)\cdot\ldots\cdot(1-2(k-1))}{k!\cdot 2^k}$$
$$= (-1)^{k-1}\cdot\frac{(2-1)\cdot\ldots\cdot(2(k-1)-1)}{k!\cdot 2^k}$$
$$= (-1)^{k+1}\cdot\frac{(2k-3)!}{k!\cdot 2^k\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k-4)}$$
$$= (-1)^{k+1}\cdot\frac{(2k-3)!}{k!\cdot 2^{k+(k-2)}\cdot(2k-2)!}$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101223:

Für die Zeile 0 stimmt die Aussage offenbar.

Summieren wir nun alle Elemente der Zeile $n+1$, und stellen uns jede einzelne Zahl in dieser Zeile $n+1$ ersetzt vor durch die Summe der drei Zahlen aus Zeile n, aus der sie entsteht, dann erhalten wir eine Summe, deren Summanden ausschließlich Zahlen aus der n-ten Zeile sind (sowie Rand-Nullen).

Jede Zahl aus Zeile n taucht dabei in der Summe s_{n+1} genau drei mal auf: Sie ist nämlich beteiligt an der Bildung der Zahl direkt unter sich, sowie jeweils rechts bzw. links daneben. Damit gilt $s_{n+1}=3\cdot s_n$, was dann induktiv die Behauptung zeigt.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101224:

Sei $e_1=AS, e_2=CS, f_1=BS, f_2=DS$. Nach dem Kosinussatz gilt

$$2e_1f_1\cos\delta = e_1^2+f_1^2-a^2$$
$$2e_2f_2\cos\delta = e_2^2+f_2^2-c^2$$
$$-2e_2f_1\cos\delta = 2e_2f_1\cos(180^\circ-\delta) = e_2^2+f_1^2-b^2$$
$$-2e_1f_2\cos\delta = 2e_1f_2\cos(180^\circ-\delta) = e_1^2+f_2^2-d^2\ .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
2ef\cos\delta &= 2(e_1+e_2)(f_1+f_2)\cos\delta \\
&= (e_1^2+f_1^2-a^2)+(e_2^2+f_2^2-c^2)-(e_2^2+f_1^2-b^2)-(e_1^2+f_2^2-d^2) \\
&= -a^2-c^2+b^2+d^2 \\
&= 2ac-2bd-(a+c)^2+(b+d)^2 \\
&= 2ac-2bd+(b+d-a-c)(a+c+b+d)\ .
\end{aligned}$$

Da in einem Tangentenviereck $a+c=b+d$ gilt, ist die letze Zeile gleich $2(ac-bd)$, woraus die Behauptung folgt.

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314