10. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1970/1971

Aufgaben und Lösungen

10. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 101241:

Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, zu denen es reelle Zahlen x gibt, so daß $\sqrt{a+x}$ und $\sqrt{a-x}$ reell sind und die Ungleichung $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$ erfüllt ist.

Wie lauten die Werte von x in Abhängigkeit von a?

Aufgabe 101242:

Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Wenn h eine reelle Zahl ist und wenn eine ganzrationale Funktion f vom Grade n mit reellen Koeffizienten keine reellen Nullstellen besitzt, so gilt dasselbe von der ganzrationalen Funktion F, die durch

$$F(x) = f(x) + h \cdot f'(x) + h^2 \cdot f''(x) + \cdots + h^n \cdot f^{(n)}(x) \text{ definiert ist.}$$

Aufgabe 101243:

Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Haben je drei von vier in der gleichen Ebene liegenden konvexen Vielecksflächen jeweils einen Punkt gemeinsam, so gibt es einen Punkt, der jeder der vier Vielecksflächen angehört.

Aufgabe 101244:

Zwei Personen A und B spielen folgendes Spiel:

In dem Gleichungssystem

$$x + a_1 y = b_1 \qquad (1)$$
$$a_2 y + b_2 z = a_3 \qquad (2)$$
$$b_3 x + a_4 z = b_4 \qquad (3)$$

wählt zunächst A für den Koeffizienten a_1, dann B für den Koeffizienten b_1, dann wieder A für a_2, dann B für b_2 u.s.w., zum Schluß B für b_4 je eine beliebige ganze Zahl.

A hat genau dann gewonnen, wenn das System (1), (2), (3) genau eine ganzzahlige Lösung (x, y, z) hat.

a) Kann A so spielen, d.h., kann er die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_4$ jeweils nach der Wahl von $b_1, \ldots, b_3$ durch B so auswählen, daß er gewinnt?

b) Kann A von vornherein für die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_4$ solche Werte angeben, daß er unabhängig von der Wahl der Koeffizienten durch B (in jedem Falle) gewinnt?

Aufgabe 101245:

Es seien $A_0A_1 \dots A_n$ $(n \geqslant 2)$ ein ebener konvexer Polygonzug der Länge s mit $A_0 \neq A_n$. Die Punkte $A_1, \dots, A_{n-1}$ mögen auf ein und derselben Seite der Geraden g durch A_0 und A_n liegen.

Anmerkung: Ein ebener Polygonzug $A_0A_1 \dots A_n$ heiße konvex, wenn der durch die Strecke A_0A_n geschlossene Polygonzug eine konvexe Fläche begrenzt.

Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt F der bei Rotation des Polygonzuges um g entstehenden Fläche nicht größer als $\pi \cdot \frac{s^2}{2}$ ist, daß also $F \leqslant \pi \cdot \frac{s^2}{2}$ gilt.

Aufgabe 101246A:

Definition: Eine Menge M von Elementen u, v, w, ... heißt genau dann eine Gruppe, bezüglich der algebraischen Operation A, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

a) Jedem geordneten Paar $[u, v]$ von Elementen aus M ist vermöge der Operation A ein Element w aus M zugeordnet (man schreibt $u \circ v = w$).

b) Die algebraische Operation A ist assoziativ, d.h., für alle Elemente u, v, w aus M gilt: $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.

c) Zu je zwei Elementen u und v aus M existiert mindestens ein Element x aus M, so daß $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus M, so daß $y \circ u = v$ gilt.

Es sei nun P die Menge aller Polynome ersten Grades $f(x) = a_0 + a_1x$, wobei a_0, a_1 rationale Zahlen sind und $a_1 \neq 0$ gilt.

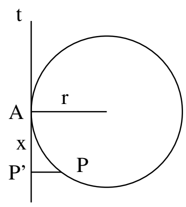
Ferner sei in P eine algebraische Operation A wie folgt definiert: Sind $f(x)$ und $g(x)$ Polynome aus P, so ist $f(x) \circ g(x) = g[f(x)]$.

Es ist zu entscheiden, ob P eine Gruppe bezüglich A ist.

Aufgabe 101246B:

In einem ebenen Gelände erfolge das Abstecken eines Kreisbogens vom Radius r, falls außerdem eine Tangente t an diesen Kreisbogen und ihr Berührungspunkt A bekannt sind, dadurch, daß in beliebigen Punkten P' von t (mit $\overline{AP'} = x < r$) Senkrechte auf t errichtet und auf ihnen (nach der Seite von t, auf der der Kreisbogen liegt) Strecken $P'P$ so abgetragen werden, daß die Punkte P Punkte des gesuchten Kreisbogens sind. Dabei gelte $\overline{P'P} = y < r$.

a) Man beweise, daß dann $y = \frac{x^2}{2r-y}$ gilt!



b) In der Praxis genügt es oft, Näherungswerte für y zu ermitteln. Das geschieht auf folgende Weise:

Einen ersten Näherungswert y_1 erhält man aus der Gleichung $y_1 = \frac{x^2}{2r}$.
Falls dessen Genauigkeit nicht ausreicht, wird ein zweiter Näherungswert y_2 aus der Gleichung $y_2 = \frac{x^2}{2r-y_1}$ ermittelt.

Analog kann weiter verfahren werden, bis die geforderte Genauigkeit erreicht ist.

Untersuchen Sie, ob es eine kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft gibt, daß für alle positiven reellen Zahlen $x \leqslant \frac{1}{n}r$ der relative Fehler $\delta = \frac{|y-y_1|}{r}$ des Näherungswertes $y_1 = \frac{x^2}{2r}$ nicht größer als 0,001 ausfällt, daß also $\delta \leqslant 0{,}001$ gilt.

10. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 101241:

Mit (*) bezeichnen wir im folgenden die Ungleichung $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass $a=0$. In diesem Fall sind die beiden Wurzeln nur für $x=0$ reell, (*) ist dann aber nicht erfüllt.

Für $a<0$ können für keinen Wert x beide Wurzeln reell sein, da ansonsten $x\geq -a$ und $x\leq a$ gelten müsste.

Sei von nun an $a>0$. Dann sind genau für alle $x\in[-a,a]$ beide Wurzeln reell.

Quadrieren von (*) ist eine Äquivalenzumformung, da beide Seiten positiv sind; (*) ist also äquivalent zu

$$a+x+2\sqrt{a^2-x^2}+a-x>a^2 \iff (**)\ 2\sqrt{a^2-x^2}>a^2-2a$$

Für $0<a<2$ ist $a^2-2a<0$, (**) also für alle $x\in[-a,a]$ erfüllt.

Es verbleibt der Fall $a\geq 2$.

Quadrieren von (**) ist wieder eine Äquivalenzumformung, da beide Seiten ≥ 0 sind; (**) ist also äquivalent zu

$$4(a^2-x^2)>a^4-4a^3+4a^2 \iff (***)\ 4x^2<4a^3-a^4=a^2a(4-a)$$

Falls $a\geq 4$, ist die rechte Seite von (***) ≤ 0, (***) kann also von keinem x erfüllt werden.

Schließlich sei nun $2\leq a<4$.

Dann ist (***) äquivalent zu $|x|<\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}$. Da $\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}\leq a \iff a(4-a)\leq 4$ und letzteres für alle $a\in[2,4)$ erfüllt ist, ist das Intervall $I=\left(-\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)},\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}\right)$ im intervall $[-a,a]$ enthalten und somit erfüllen alle $x\in I$ die Ungleichung (***).

Zusammenfassend:

$a<0$: Für kein x sind beide Wurzeln reell und somit ist (*) für kein x erfüllt.

$a=0$: Genau für $x=0$ sind beide Wurzeln reell, aber für kein x ist (*) erfüllt.

$0<a<2$: Genau für $x\in[-a,a]$ sind beide Wurzeln reell und ist (*) erfüllt.

$2\leq a<4$: Genau für $x\in[-a,a]$ sind beide Wurzeln reell, und genau für

$$x\in\left(-\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)},\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}\right)$$

ist zusätzlich (*) erfüllt.

$a \geq 4$: Genau für $x \in [-a, a]$ sind beide Wurzeln reell, aber für kein x ist (*) erfüllt.

Aufgeschrieben und gelöst von StrgAltEntf

Lösung 101242:

Es ist unmittelbar klar, dass F ebenfalls ein Polynom vom Grade n mit reellen Koeffizienten ist.

Da f keine reellen Nullstellen hat, muss n gerade sein und es muss entweder $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$ oder $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$ gelten. O.B.d.A. gelte $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$.

Da F den gleichen Grad und den gleichen Leitkoeffizienten wie f hat, hat F ein globales Minimum, d.h. es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) \geq F(x_0)$. Es genügt daher zu zeigen, dass $F(x_0) > 0$ gilt.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = F(x) - hF'(x)$. Das kann man leicht nachrechnen oder es sich abstrakt mit der geometrischen Reihe herleiten (beachte, dass die Ableitung auf der Menge der Polynome vom Grad $\leq n$ ein nilpotenter Operator ist):

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} h^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f = \left(1 - h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} f.$$

Wegen $F'(x_0) = 0$ folgt somit

$$F(x_0) = f(x_0) + hF'(x_0) = f(x_0) > 0.$$

Anmerkung: Diese Aufgabe ist mit der Aufgabe 081246 identisch.

Aufgeschrieben und gelöst von Nuramon

Lösung 101243:

Bezeichne die gegebenen Flächen mit F_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Betrachte die Dreier-Schnitte

$$A_i := \cap_{j \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i\}} F_j$$

welche nach Voraussetzung alle nicht leer sind, und wähle für jedes A_i einen Punkt $P_i \in A_i$.

Wir betrachten das Problem für allgemeine konvexe Flächen und nutzen die eine konvexe Fläche definierende Eigenschaft aus, dass mit zwei Punkten auch die Verbindungslinie der zwei Punkte in der Fläche enthalten ist.

Daraus folgt, dass die Verbindungslinie P_iP_j in $F_k \cap F_m$ enthalten ist (mit $k, m \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i, j\}$ und $k \neq m$, $i \neq j$). Wenn zwei der Punkte P_i übereinstimmen, so ist dies der gesuchte Punkt, da er in allen der gegebenen Flächen enthalten ist.

Seien die P_i nun also alle verschieden. Wenn drei der P_i auf einer Linie liegen, so ist der mittlere von ihnen in allen vier Flächen enthalten (denn der linke und rechte Punkt, sowie deren Verbindungslinie [wegen Konvexität], sind in der für den mittleren Punkt noch eventuell fehlenden Fläche enthalten) und damit der gesuchte Punkt.

Wenn keine drei der P_i auf einer Linie liegen, so bilden sie ein nicht-entartetes Viereck, sodass es zwei sich schneidende Verbindungslinien P_iP_j und P_kP_m gibt, mit i, j, k, m paarweise verschieden. Der Schnittpunkt ist in allen Flächen enthalten und damit der gesuchte Punkt.

Aufgeschrieben und gelöst von Kornkreis

Lösung 101244:

Die Antwort zu b (und damit auch zu a) lautet ja.

A wählt $a_1 = a_3 = 0$ und $a_2 = a_4 = 1$. Das Gleichungssystem lautet dann

(1) $x = b_1$

(2) $y + b_2 z = 0$

(3) $b_3 x + z = b_4$

Dieses Gleichungssystem besitzt die eindeutige und ganzzahlige Lösung

$$x = b_1, \qquad y = b_1 b_2 b_3 - b_2 b_4, \qquad z = b_4 - b_1 b_3$$

Aufgeschrieben und gelöst von StrgAltEntf

Lösung 101245:

Seien s_k die Länge der Strecke $A_{k-1}A_k$ und r_k der Abstand von A_k zur Gerade g. Die Rotationsfläche wird aus Mantelflächen von Kegelstümpfen zusammengesetzt. Eine einzelne Mantelfäche F_k definiert durch die Punkte $A_{k_1}A_k$ hat die Oberfläche $F_k = \pi s_k(r_{k-1} + r_k)$. Die Summe der F_k ergibt dann F.

Falls es keinen Punkt A_m, der genau auf der Mitte des Polygonzuges liegt, fügen wir diesen hinzu. Der so entstandene Polygonzug erzeugt dieselbe Oberfläche.

Behauptung:

Die durch $A_0 \dots A_m$ erzeugte Fläche hat höchstens den Flächeninhalt $\pi\frac{s^2}{4}$, d.h. $F_1 + \ldots + F_m \leq \pi\frac{s^2}{4}$

Beweis:

Für r_k haben wir die Abschätzung $r_k \leq |A_0A_k| \leq p_k$ mit $p_k := s_1 + \ldots s_k$, da eine Strecke die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist. Weiterhin gilt $|r_k - r_{k-1}| \leq s_k$, da s_k die Kante eines Kegelstumpfes mit Radien r_k, r_{k-1} ist. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} F_k &= \pi s_k(r_{k-1} + r_k) \\ &= \pi s_k(2r_{k-1} + (r_k - r_{k-1}) \\ &\leq \pi s_k(2p_{k-1} + s_k) \\ &= \pi\left[(p_{k-1} + s_k)^2 - p_{k-1}^2\right] \\ &= \pi(p_k^2 - p_{k-1}^2) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir durch aufsummieren $F_1 + \ldots + F_m \leq \pi(p_0^2 - p_m^2) = \pi\frac{s^2}{4}$, da $p_0 = 0$ und nach Wahl $p_m = \frac{s}{2}$ gilt.

Wegen Symmetrie gilt ebenso $F_{m+1} + \ldots + F_n \leq \pi\frac{s^2}{4}$. Hieraus folgt insgesamt $F \leq \pi\frac{s^2}{2}$. $\square$

Lösung 101246A:

Bei P mit der Operation A handelt es sich um eine Gruppe. Zu zeigen sind die Eigenschaften a, b und c.

a) Seien $f(x) = a_0 + a_1 x$ und $g(x) = b_0 + b_1 x$ Elemente von P. Dann ist

$$f(x) \circ g(x) = g(f(x)) = b_0 + b_1(a_0 + a_1 x) = b_0 + b_1 a_0 + b_1 a_1 x = c_0 + c_1 x$$

mit $c_0 = b_0 + b_1 a_0$ und $c_1 = b_1 a_1$. Da $a_1, b_1 \neq 0$, ist auch $c_1 \neq 0$ und somit $f(x) \circ g(x) = c_0 + c_1 x$ ein Element von P.

b) Seien $f(x), g(x), h(x) \in P$. Dann ist

$$(f(x) \circ g(x)) \circ h(x) = g(f(x)) \circ h(x) = h(g(f(x))) = f(x) \circ h(g(x)) = f(x) \circ (g(x) \circ h(x))$$

c) Seien $f(x) = a_0 + a_1x$ und $g(x) = b_0 + b_1x$ Elemente aus P. Definiere dann

$$h(x) = b_0 - \frac{a_0b_1}{a_1} + \frac{b_1}{a_1}x$$

Da $a_1 \neq 0$, ist $h(x)$ ein Element aus P, und es ist

$$f(x) \circ h(x) = h(f(x)) = b_0 - \frac{a_0b_1}{a_1} + \frac{b_1}{a_1}(a_0 + a_1x) = b_0 + b_1x = g(x)$$

Sei weiterhin $k(x) = \frac{b_0-a_0}{a_1} + \frac{b_1}{a_1}x$. $k(x)$ ist ebenfalls ein Element aus P, und es ist

$$k(x) \circ f(x) = f(k(x)) = a_0 + a_1(\frac{b_0 - a_0}{a_1} + \frac{b_1}{a_1}x) = b_0 + b_1x = g(x)$$

Aufgeschrieben und gelöst von StrgAltEntf

Lösung 101246B:

a) Wir legen in die Ebene ein x-z-Koordinatensystem, sodass der Mittelpunkt des Kreises im Koordinatenursprung und der Berührungspunkt A im Punkt $(0, r)$ liegt. Die Tangente t bildet die Gerade $z = r$.

Ein Punkt P' habe die Koordinaten $(x, 1)$ und somit den Abstand x zu A. (Da Figur ist symmetrisch zur Geraden $x = 0$, sodass man sich o.B.d.A. auf positive x beschränken kann.) Die Senkrechte zu t durch P' ist die Parallele zur z-Achse durch P', haben also x-Koordinate x. Damit hat auch P die x-Koordinate x.

Da alle Punkte auf dem Kreis $x^2 + z^2 = r^2$ erfüllen und es mit P um den "oberen" Schnittpunkt mit dem Kreis geht, lässt sich dessen z-Koordinate erhalten als $z = \sqrt{r^2 - x^2}$. Der Abstand $|P'P|$ ist damit $y = r - z = r - \sqrt{r^2 - x^2}$.

Mit diesem Wert für y rechnet man schnell nach, dass $2r - y = r + \sqrt{r^2 - x^2}$ und

$$\frac{x^2}{2r - y} = \frac{x^2}{r + \sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{x^2 \cdot (r - \sqrt{r^2 - x^2})}{(r + \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot (r - \sqrt{r^2 - x^2})} = \frac{x^2 \cdot y}{r^2 - (r^2 - x^2)} = y \cdot \frac{x^2}{x^2} = y$$

ist.

b) Es ist

$$\delta = \frac{|y - y_1|}{r} = \left|\frac{y}{r} - \frac{y_1}{r}\right| = \left|(1 - \sqrt{1 - t^2}) - \left(\frac{1}{2}t^2\right)\right|$$

mit $t := \frac{x}{r}$.

Dabei ist für alle reellen $1 > t > 0$

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{1 - t^2} &= \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{1} = \frac{(1 - \sqrt{1 - t^2}) \cdot (1 + \sqrt{1 - t^2})}{1 + \sqrt{1 - t^2}} \\ &= \frac{1 - (1 - t^2)}{1 + \sqrt{1 - t^2}} = \frac{t^2}{1 + \sqrt{1 - t^2}} \\ &= t^2 \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 - t^2}} \end{aligned}$$

und also

$$\delta = \left|t^2 \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 - t^2}} - \frac{1}{2}t^2\right| = t^2 \cdot \left|\frac{1}{1 + \sqrt{1 - t^2}} - \frac{1}{2}\right|$$

Dabei ist wegen $0 < t^2 < 1$ auch $0 < \sqrt{1-t^2} < 1$ und $\frac{1}{2} < \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} < 1$, also $0 < \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$. Damit ist $\delta < \frac{1}{2}t^2$.

Ist $t < \frac{1}{23}$, so ist $t^2 < \frac{1}{23^2} = \frac{1}{529} < \frac{1}{500}$ und damit $\delta < \frac{1}{2}t^2 < \frac{1}{1000} = 0{,}001$. Also folgt für alle $n \geq 23$, dass für alle $x \leq \frac{1}{n}r$ die Abweichung δ höchstens 0,001 beträgt. Gegebenenfalls gilt dies auch für noch kleinere natürliche Zahlen n. Jedoch gibt es in jedem Fall ein kleinstes solches n.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix