11. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Saison 1971/1972

Aufgaben und Lösungen

11. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110611:

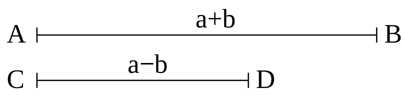
Von zwei Autos vom Typ ”Wartburg” legte das eine eine Strecke von 1 200 km zurück, das andere eine Strecke von 800 km. Es sei angenommen, daß jedes der beiden Autos für jeden Kilometer die gleiche Menge Kraftstoff verbrauchte. Dabei verbrauchte das zweite Auto 36 Liter Kraftstoff weniger als das erste.

Berechne, wieviel Liter Kraftstoff beide Autos zusammen für die oben angegebenen Strecken verbrauchten!

Aufgabe 110612:

Von den beiden abgebildeten Strecken AB und CD hat die erste die Länge $a + b$, die zweite die Länge $a - b$.

Konstruiere unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge a und eine Strecke der Länge b! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!



Aufgabe 110613:

Vier Flächen eines Holzwürfels von 3 cm Kantenlänge werden rot angestrichen, die beiden übrigen bleiben ohne Anstrich. Danach wird der Würfel in genau 27 Würfel von je 1 cm Kantenlänge zersägt.

Ermittle von diesen kleinen Würfeln die Anzahl derjenigen, die

keine rot angestrichene Fläche,

genau eine rot angestrichene Fläche,

genau zwei rot angestrichene Flächen,

genau drei rot angestrichene Flächen besitzen!

Unterscheide dabei die folgenden Fälle:

a) Die nicht angestrichenen Flächen haben keine gemeinsame Kante.

b) Die nicht angestrichenen Flächen haben eine gemeinsame Kante.

Als Lösung genügt die Angabe der Anzahlen ohne Begründung.

Aufgabe 110614:

Zwei Orte A und B seien durch eine 999 km lange Straße miteinander verbunden.

Im Abstand von jeweils 1 km seien auf dieser Straße Kilometersteine aufgestellt, die beidseitig derart beschriftet sind, daß auf der einen Seite jedes Steines seine Entfernung von A und auf der anderen Seite seine Entfernung von B in km angegeben ist. Z.B. trägt der Stein am Ortsausgang von A die Beschriftung 0 und 999, der Stein am Ortseingang von B die Beschriftung 999 und 0.

Ermittle von diesen Steinen die Anzahl derjenigen, bei deren Beschriftung höchstens zwei voneinander verschiedene Ziffern verwendet wurden (z B. 722 und 277)!

11. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 110611:

Wegen $1\,200 - 800 = 400$ legte das erste Auto 400 km mehr zurück als das zweite. Für diese 400 km verbrauchte es laut Aufgabe 36 Liter Kraftstoff.

Beide Autos legten zusammen $1\,200\,\text{km} + 800\,\text{km} = 2\,000\,\text{km}$ zurück. Das sind 5 mal soviel wie 400 km. Folglich verbrauchten sie insgesamt wegen $5 \cdot 36 = 180$ für diese Strecken 180 Liter Kraftstoff.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

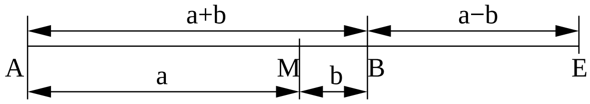
Lösung 110612:

Konstruktionsbeschreibung:

(1) Wir zeichnen die Strecke AB.

(2) Wir verlängern die Strecke AB über B hinaus um (eine Strecke der gleichen Länge wie) CD.

(3) Ist E der Endpunkt dieser Verlängerung, so halbieren wir die Strecke AE. Der Mittelpunkt von AE sei M genannt. Dann ist AM eine Strecke der Länge a und MB eine Strecke der Länge b.



Begründung: Nach Konstruktion hat AE die Länge

$$a + b + a - b = 2a.$$

Daher hat AM die Länge a sowie MB die Länge

$$a + b - a = b.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 110613:

a) Genau 3 kleine Würfel haben keine rot angestrichene Fläche.

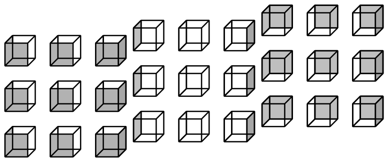
Genau 12 kleine Würfel haben genau eine rot angestrichene Fläche.

Genau 12 kleine Würfel haben genau zwei rot angestrichene Flächen. Keiner der Würfel hat drei rot angestrichene Flächen.

b) Die Anzahlen lauten in diesem Falle in der oben angegebenen Reihenfolge: 4; 12; 9; 2.

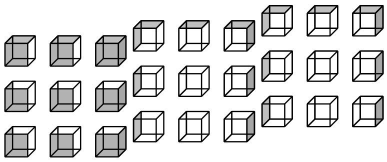
Die Zeichnungen werden vom Schüler nicht verlangt.

3a)



(Die 4 Mantelflächen seien angestrichen, die Grund- und die Deckfläche nicht; bei jedem kleinen Würfel ist die Zahl der angestrichenen Flächen angegeben.)

3b)



(3 Mantelflächen und die Deckfläche seien angestrichen, die hinten liegende Mantelfläche und die Grundfläche nicht.)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 110614:

Da die Straße die Länge 999 km hat, ist die Summe der Kilometerangaben auf jedem der Steine 999. Daraus folgt:

(1) Auf der einen Seite jedes der Kilometersteine steht eine gerade und auf der anderen Seite eine ungerade Zahl. Beide Zahlen sind also voneinander verschieden.

(2) Die Summe der Einerziffern auf jedem Kilometerstein beträgt 9, desgleichen die Summe der beiden Zehnerziffern und ebenso die Summe der beiden Hunderterziffern.

(3) Zu jedem Kilometerstein S der Aufgabe gibt es genau einen anderen S', der die gleiche Bezifferung trägt (S' hat von B dieselbe Entfernung wie S von A).

Die gesuchte Zahl x ist daher gleich der doppelten Anzahl y derjenigen Kilometersteine, bei deren Beschriftung höchstens zwei Ziffern verwendet wurden und die näher an A stehen als an B. Bei jedem solchen Stein S ist die Hunderterziffer der Kilometerangabe von S nach B eine der Ziffern 5, 6, 7, 8 oder 9 (wegen (2)).

Daher lautet die Hunderterziffer der anderen Kilometerangabe auf S jeweils 4, 3, 2, 1 bzw. 0.

In den ersten vier Fällen sind damit die beiden vorkommenden Ziffern bestimmt; aber auch im Fall 5 kann außer 9 (und evtl. 0) keine andere Ziffer z auftreten, da sonst die drei verschiedenen Ziffern 9, z und $(9 - z)$ vorkämen.

Nun kann man mit den Ziffern a und b, $b \neq a$, genau 4 verschiedene dreistellige Zahlen bilden, deren Hunderterziffer a ist, nämlich aaa, aab, aba, abb.

Infolgedessen ist, da hier a die fünf Werte 5, 6, 7, 8, 9 und nur diese annehmen kann: $y = 5 \cdot 4$ und die gesuchte Anzahl $x = 2y = 40$.

Es gibt also genau 40 Kilometersteine, bei deren Beschriftung höchstens zwei voneinander verschiedene Ziffern verwendet wurden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Quellenverzeichnis

(13) "a+b = b+a" - Heft 52, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 5/6 - Dokumentation I.-XII. Olympiade (1961-1972), Mathematischer Lesebogen vom Rat des Stadtbezirks Leipzig Südost, Abteilung Volksbildung, J. Lehmann und W. Unze, 1973.