# 11. Mathematik Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 8
# Saison 1971/1972

Aufgaben und Lösungen

# 11. Mathematik-Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 8
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110811:

a) Berechne die Zahl

$$x = -\left\{-\left[-(-2)\right]^2\right\}^3 \cdot \left\{-\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2\right\}$$

b) Stelle fest, ob sich $x$ als Potenz einer natürlichen Zahl darstellen läßt!

Aufgabe 110812:

Ermittle alle rationalen Zahlen $x$, die folgende Eigenschaft haben:

Addiert man 33 zu $x$ und halbiert die entstandene Summe, so erhält man das Doppelte der zu $x$ entgegengesetzten Zahl.

Aufgabe 110813:

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck $\Delta ABC$ mit $A$ als Scheitel des rechten Winkels und mit $\overline{AC} < \overline{AB}$ (1). Der Kreis um $A$ mit $\overline{AC}$ schneidet $BC$ außer in $C$ noch in einem Punkt $E$, wobei $E$ wegen (1) zwischen $C$ und $B$ liegt. Die im Punkt $E$ an den genannten Kreis gelegte Tangente schneidet $AB$ in einem Punkt $D$, der zwischen $A$ und $B$ liegt.

Beweise, daß $\overline{ED} = \overline{DB}$ gilt!

Aufgabe 110814:

Gegeben seien ein beliebiges Parallelogramm $ABCD$ sowie eine beliebige Länge $e$ ($e > 0$).

Konstruiere unter Beibehaltung der Seite $AB$ ein zu $ABCD$ flächengleiches Parallelogramm $ABC_1D_1$, das auf derselben Seite der Geraden durch $A$ und $B$ wie $ABCD$ liegt und dessen Diagonale $AC_1$ die gegebene Länge $e$ hat!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken stets eindeutig ein Parallelogramm der geforderten Art konstruieren läßt! (Eine Untersuchung ob zwei eventuell entstehende verschiedene Parallelogramme einander kongruent sind, wird hier nicht verlangt.)

# 11. Mathematik-Olympiade
## 1. Stufe (Schulolympiade)
## Klasse 8
## Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 110811:

a)
$$x = -\left\{-\left[-(-2)\right]^2\right\}^3 \cdot \left\{-\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2\right\} = -\left\{-[2]^2\right\}^3 \cdot \left\{-\left[\frac{1}{8}\right]^2\right\} = -\{-4\}^3 \cdot \left\{-\frac{1}{64}\right\} = -1$$

b) Da als Potenz einer natürlichen Zahl niemals eine negative Zahl auftritt, kann x nicht Potenz einer natürlichen Zahl sein.

*Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)*

Lösung 110812:

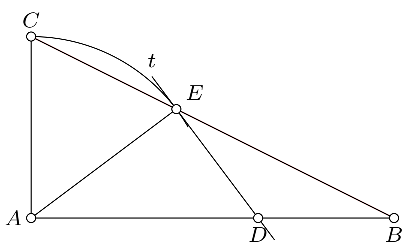
Addiert man 33 zu einer Zahl $x$ und halbiert die entstandene Summe, so erhält man $\frac{x+33}{2}$. Das Doppelte der zu $x$ entgegengesetzten Zahl ist $2 \cdot (-x)$. Daher hat eine Zahl x genau dann die genannte Eigenschaft, wenn sie die Gleichung
$$\frac{x+33}{2} = -2x$$
erfüllt.

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $x + 33 = -4x$ gilt. Das ist äquivalent mit $5x = -33$ und dies mit $x = -\frac{33}{5}$. Daher hat genau diese Zahl die verlangte Eigenschaft.

*Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)*

Lösung 110813:

Das Dreieck $\triangle AEC$ ist laut Konstruktion gleichschenklig mit $AC = AE$. Folglich sind die Winkel $\sphericalangle ACE$ und $\sphericalangle AEC$ als Basiswinkel gleich groß.



Der Winkel $\sphericalangle ACE$ wird vom Winkel $\sphericalangle ABC$ und der Winkel $\sphericalangle AEC$ vom Winkel $\sphericalangle BED$ jeweils zu einem rechten Winkel ergänzt. Daher sind auch $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle BED$ gleich groß.

Also ist $\triangle DBE$ gleichschenklig, und es gilt: $ED = DB$. $\square$

*Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)*

Lösung 110814:

(I) Angenommen, $ABC_1D_1$ sei ein Parallelogramm, wie es konstruiert werden soll. Dann stimmt es mit $ABCD$ im Flächeninhalt und in der Seite $AC$ überein. Daher muss es mit $ABCD$ auch in der zu $AB$ gehörigen Höhe übereinstimmen. Also müssen $C_1$ und $D_1$ auf der Geraden durch $C$ und $D$ liegen.

(II) Daher kann ein Parallelogramm $ABC_1D_1$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zeichnet die Gerade $g$ durch $C$ und $D$.

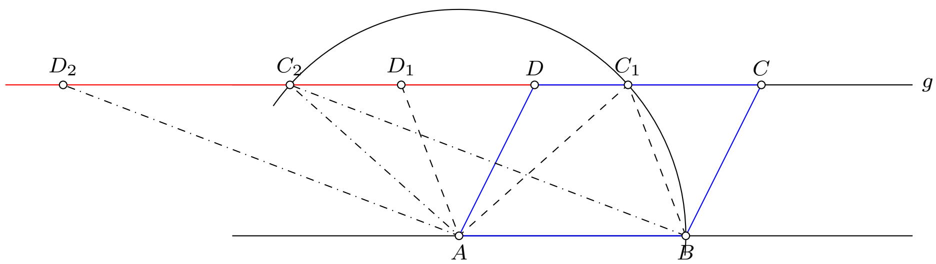
(2) Man schlägt den Kreis um $A$ mit $e$. Schneidet er $g$, so sei einer der Schnittpunkte $C_1$ genannt.

(3) Man zieht die Parallele zu $BC_1$ durch $A$. Ihr Schnittpunkt mit $g$ sei $D_1$ genannt.

(III) Der Beweis, dass jedes so erhaltene Parallelogramm $ABC_1D_1$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht, ergibt sich aus (II) und der Umkehrbarkeit der Schlüsse in (I).

(IV) Der Abstand der Seite $AB$ von der Seite $CD$ sei mit $h$ bezeichnet. Dann erhält man für $e < h$ keinen Schnittpunkt $C_1$. Die Aufgabe hat in diesem Falle keine Lösung.

Im Falle $e = h$ gibt es genau einen Schnittpunkt $C_1$ (Berührungspunkt) und mithin genau eine Lösung, im Falle $e > h$ dagegen zwei Schnittpunkte $C_1$ und $C_2$ und damit zwei verschiedene Parallelogramme $ABC_1D_1$ und $ABC_2D_2$ als Lösungen.




*Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)*

# Quellenverzeichnis

**(25)** Offizielle Lösung der Aufgabenkommission