11. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1971/1972

Aufgaben und Lösungen

11. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110911:
Jörg schreibt die folgende Gleichung auf:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d} = \frac{1}{(a+b)(c+d)}. \tag{1}$$

Michael meint, daß sie "falsch" sei. Jörg, der sich nicht so leicht "überzeugen" läßt, wählt für die Variablen a, b, c und d Zahlen, setzt sie in die Gleichung (1) ein und erhält zu Michaels Überraschung eine wahre Aussage.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, nur aus den Zahlen -1, 0, 1 für a, b, c und d je eine so auszuwählen, daß die Gleichung (1) erfüllt wird!

Aufgabe 110912:
Jede Seitenhalbierende eines Dreiecks zerlegt die Dreiecksfläche in zwei Dreiecksflächen, die gleich lange Grundseiten und gleich lange Höhen haben und somit inhaltsgleich sind. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden heißt Schwerpunkt des Dreiecks.

Untersuchen Sie, ob jede Gerade durch den Schwerpunkt S eines Dreiecks ΔABC dessen Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt!

Aufgabe 110913:
Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen a, für die der Term

$$t = \frac{a+11}{a-9}$$

eine natürliche Zahl ist!

Aufgabe 110914:
In einer Ebene ε liege ein Rechteck $ABCD$. S sei ein Punkt der Senkrechten in A auf ε.

Ermitteln Sie die Größe des Winkels $\sphericalangle CDS$!

11. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 110911:

Addiert man die Quotienten auf der linken Seite der Gleichung, so folgt, daß die Gleichung gleichbedeutend ist mit

$$\frac{c+d+a+b}{(a+b)(c+d)} = \frac{1}{(a+b)(c+d)}.$$

Diese Gleichung ist genau dann eine wahre Aussage, wenn $a+b+c+d=1$ und $a \neq -b$ sowie $c \neq -d$ gelten. Wählt man für a eine der Zahlen -1, 0 oder 1, so verbleiben für b wegen $a \neq -b$ je genau zwei Zahlen , nämlich die in der untenstehenden Tabelle genannten.

Von den erhaltenen Zahlen sind die mit $a+b=-2$ und die mit $a+b=1$ auszuschließen, da sich aus $a+b+c+d=1$ für sie $c+d=3$ bzw. $c+d=0$ ergibt, was durch Wahl von c und d aus den Zahlen -1, 0, 1 nicht zu erreichen ist bzw. im Widerspruch zu $c \neq -d$ steht.

In jeder der nun verbliebenen Möglichkeiten ergibt sich genau eine Zahl für $c+d$, die durch Wahl von c und d aus den Zahlen -1, 0, 1 durch genau die folgenden Zahlen erreicht werden kann:

a	-1	-1	0	0	1	1	1
b	-1	0	-1	1	0	1	1
a+b	-2	-1	-1	1	1	2	1
c+d	3	2	2	0	0	-1	-1
c	-	1	1	-	-	-1	0
d	-	1	1	-	-	0	-1

Die 2., 3., 6. und 7. Spalte genügen als einzige allen Bedingungen der Aufgabe, wie man durch Einsetzen erkennt.

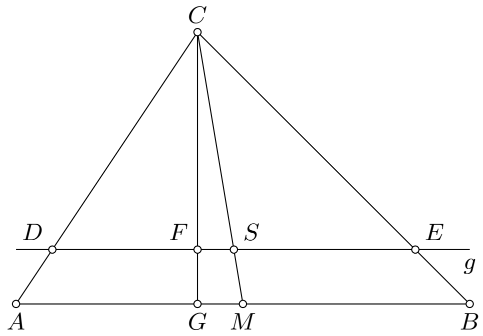
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Lösung 110912:

Im Dreieck ΔABC sei CM die Seitenhalbierende der Seite AB und S der Schwerpunkt des Dreiecks. Dann gilt nach einem Satz über die Seitenhalbierenden

$$|SM| : |SC| = 1 : 2. \tag{1}$$

Wir zeigen nun, daß nicht jede Gerade durch S die Fläche des Dreiecks ΔABC in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt. Die Parallele g zu AB durch S schneide AC und BC in D bzw. E. Diese Punkte existieren stets, da AC und BC nicht parallel zu AB und damit auch nicht parallel zu g sind.



Das Lot CG von C auf die Gerade durch A und B schneide g in F. Dieser Punkt existiert stets, da $CG \perp g$ gilt.

Nach den Strahlensätzen und wegen (1) ist dann

$$|DE| : |AB| = 2 : 3, \text{ d.h.} \tag{2}$$
$$|DE| = \frac{2}{3}|AB| \tag{3}$$

und

$$|CF| : |CG| = 2 : 3, \text{ d.h.} \tag{4}$$
$$|CF| = \frac{2}{3}|CG|. \tag{5}$$

Also beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ΔCDE nur $\frac{4}{9}$ von dem des Dreiecks ΔABC.

Damit ist gezeigt, daß nicht alle Geraden durch S die Dreiecksfläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Lösung 110913:

Für natürliche Zahlen $a < 9$ ist $t < 0$. Für $a = 9$ ist t nicht definiert. Ist $a > 9$ und setzt man $h = a - 9$, so ist h stets eine natürliche Zahl, ferner $a = h + 9$ und

$$t = \frac{h+20}{h} = 1 + \frac{20}{h}.$$

Somit ist t genau dann eine natürliche Zahl, wenn h Teiler von 20 ist. Mithin ergeben sich die folgenden Möglichkeiten:

h	$a = h + 9$	t
1	10	21
2	11	11
4	13	6
5	14	5
10	19	3
20	29	2

Damit erfüllen genau die Zahlen 10, 11, 13, 14, 19 und 20 alle gestellten Bedingungen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Lösung 110914:

Die Punkte A, D, S liegen in einer Ebene ε', die auf der Ebene ε durch A, B, C und D senkrecht steht; denn nach Voraussetzung ist $AD \perp AB$ und, falls $S \neq A$ ist, auch $SA \perp AB$. Im Fall $S = A$ sei ε' die zu ε senkrechte Ebene durch A und D. Daher ist in jedem Fall $CD \perp \varepsilon'$ und somit $|\sphericalangle CDS| = 90°$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Quellenverzeichnis

(12) Buch: Neue Mathematik-Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1990, Aulis-Verlag