11. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1971/1972

Aufgaben und Lösungen

11. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110931:

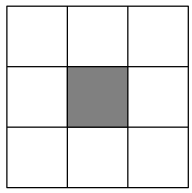
Günter erzählt:

> ”Die sechsstellige Telefonnummer unserer Schule merke ich mir folgendermaßen: Ich schreibe unsere zweistellige Hausnummer hin. Dahinter schreibe ich die Quersumme der Hausnummer und füge nun jeweils die Summe aus den letzten beiden hingeschriebenen Zahlen an, bis sechs Ziffern dastehen. Übrigens kommt in der Telefonnummer unserer Schule keine Eins vor, und unsere Hausnummer ist eine durch 3 teilbare Zahl.”

Wie lautet Günters Hausnummer und wie die Telefonnummer seiner Schule?

Aufgabe 110932:

In die nebenstehende Figur sollen neun aufeinanderfolgende natürliche Zahlen so eingetragen werden, daß in jedem Feld genau eine steht und die drei ”Zeilensummen”, die drei ”Spaltensummen” und die zwei ”Diagonalsummen” sämtlich einander gleich sind (magisches Quadrat). Beweisen Sie, daß eine derartige Belegung genau dann möglich ist, wenn in dem grauen Feld die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen steht!



Aufgabe 110933:

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Verhalten sich die Seitenlängen eines Dreiecks ΔABC wie $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$, dann stehen zwei Seitenhalbierende dieses Dreiecks senkrecht aufeinander.

Aufgabe 110934:

In einem Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ und $\overline{BC} = \overline{DA} = b$, $(a > b)$ schneide die Halbierende des Winkels $\sphericalangle BAD$ die Seite CD in S_1. Weiter sei S_2 der Mittelpunkt von AB.

Ermitteln Sie das Verhältnis $a : b$ der Seitenlängen eines solchen Rechtecks, bei dem die Halbierende des Winkels $\sphericalangle AS_2C$ die Seite CD in S_1 schneidet!

Aufgabe 110935:

Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man beweise, daß dann

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \text{ gilt!}$$

Man gebe alle Fälle an, in denen Gleichheit eintritt!

Aufgabe 110936:

Ermitteln Sie alle geordneten Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, die Lösungen der folgenden Gleichung sind!

$$2x^2 - 2xy - 5x - y + 19 = 0$$

11. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 110931:

Wenn die Quersumme der ersten beiden Zahlen zweistellig wäre, dann wäre sie höchstens 18 und damit enthielte die Telefonnummer eine 1, was nicht sein kann. Also ist die Quersumme einstellig. Da auch die Hausnummer keine 1 enthalten darf, bleiben für die Hausnummer noch die Möglichkeiten:

$$24, 27, 30, 33, 36, 42, 45, 54, 60, 63, 72, 90 \text{ mit den Quersummen } 6, 9, 3, 6, 9, 6, 9, 9, 6, 9, 9, 9 \text{ übrig.}$$

In allen Fällen außer bei 30, 33, 60 und 90 ist die erste Ziffer der nächsten Summe eine 1, was nicht geht. Bei 33 ergibt sich 336915, bei 60 ergibt sich 606612 und bei 90 ergibt sich 909918 was nicht geht. Also ist die Hausnummer 30 und die Telefonnummer 303369.

Aufgeschrieben und gelöst von ZePhoCa

Lösung 110932:

Die neun aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien mit $n, n+1, ..., n+8$ bezeichnet. Ihre Summe beträgt dann $9n + 36$.

Da die drei "Zeilensumme" gleich sein sollen, muss jede von ihnen $3n + 12$ betragen. Lauf Aufgabe gilt das auch für die übrigen fünf Summen.

Unter ausschließlicher Verwendung der gegebenen Zahlen lässt sich diese Summe auf genau 8 verschiedene Weisen aus je 3 verschiedenen Summanden bilden, nämlich auf folgende Weisen:

$$\begin{array}{lll} n+(n+4)+(n+8) & n+(n+5)+(n+7) & (n+1)+(n+3)+(n+8) \\ (n+1)+(n+4)+(n+7) & (n+1)+(n+5)+(n+6) & (n+2)+(n+3)+(n+7) \\ (n+2)+(n+4)+(n+6) & (n+3)+(n+4)+(n+5) & \end{array}$$

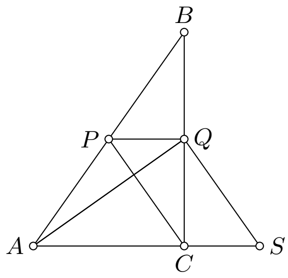
In den Summen kommen die Summanden $n, n+2, n+6$ und $n+8$ genau zweimal, die Summanden $n+1, n+3, n+5$ und $n+7$ genau je dreimal und es kommt nur der Summand $n+4$ genau viermal vor.

Bei der Bilden der Zeilen- Spalten- und Diagolsummen wird nur das farbige Feld genau viermal belegt. Daher muss im farbigen Feld die Zahl $n+4$, das ist die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen $n, ..., n+8$, stehen, und wenn sie dort steht, gibt es die angegebenen Möglichkeiten.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (28)

Lösung 110933:

Wegen $\sqrt{3}^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2$ ist das Dreieck rechtwinklig. Im folgenden betrachten wir ein Dreieck ABC mit $|AB| = \sqrt{3}$, $|AC| = 1$ und $|BC| = \sqrt{2}$.



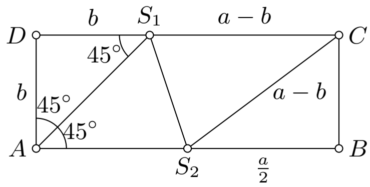
Wir verschieben die Seitenhalbierende CP parallel zu QS (PQ ist parallel zu AC). Das Dreieck AQS hat die Seitenlängen

$$|AS| = \frac{3}{2}, \quad |AQ|^2 = |AC|^2 + |CQ|^2 = \frac{3}{2}, \quad |QS|^2 = |QC|^2 + |CS|^2 = \frac{3}{4}$$

Diese erfüllen die Gleichung $|AS|^2 = |AQ|^2 + |QS|^2$. Daher sind die beiden Seitenhalbierenden AQ, CP orthogonal.

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314

Lösung 110934:



Ein Rechteck $ABCD$ genügt genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn $winkel AS_2S_1 \cong \sphericalangle S_1S_2C$ gilt. Da ferner in jedem Rechteck $\sphericalangle AS_2S_1 \cong \sphericalangle S_2S_1C$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) ist, so genügt ein genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn das Dreiecke $\triangle S_1S_2C$ gleichschenklig mit $S_1C = S_2C$ ist.

Nun ist das rechtwinkliges Dreieck $\triangle ADS_1$ stets gleichschenklig, da $\sphericalangle DAS_1$ eine Größe von 45° hat und somit $\sphericalangle DAS_1 \cong \sphericalangle AS_1D$ gilt. Daher gilt:

$DS_1 = DA = b$, und das Rechteck genügt genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn $S_2C = S_1C = a - b$ gilt. Da $\triangle S_2BC$ rechtwinklig ist, ist dies nach dem Satz des Pythagoras genau dann der Fall, wenn

$$(a-b)^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$$

oder, gleichbedeutend hiermit $a^2 - 2ab = \frac{a^2}{4}$, d.h. $\frac{3}{4}a^2 = 2ab$ gilt.

Wegen $a \neq 0$ trifft dies genau für $a : b = 8 : 3$ zu.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (28)

Lösung 110935:
Durch Multiplikation mit $abc > 0$ geht die zu zeigende Ungleichung in die äquivalente

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\,(bc + ac - ab) \qquad \text{bzw.} \qquad a^2 + 2ab + b^2 - 2(a+b)c + c^2 \geq 0$$

also $(a + b - c)^2 \geq 0$, was offensichtlich wahr ist.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 110936:

Mittels der Substitution $y = z - 3$ mit $z \in \mathbb{Z}$ geht die Gleichung über in

$$2x^2 - 2xz + 6x - 5x - z + 3 + 19 = 0 \qquad \text{also} \qquad 2x^2 - 2xz + x - z = -22$$

bzw. $(2x + 1)(x - z) = -22$.

Damit ist $2x + 1$ ein ganzzahliger Teiler von -22. Da dieser Term auch ungerade ist, ergeben sich folgende vier Fälle:

1. Fall: $2x + 1 = 1$ und $x - z = -22$. Dann ist $x = 0$, $z = 22$ und $y = 19$.
2. Fall: $2x + 1 = -1$ und $x - z = 22$. Dann ist $x = -1$, $z = -23$ und $y = -26$.
3. Fall: $2x + 1 = 11$ und $x - z = -2$. Dann ist $x = 5$, $z = 7$ und $y = 4$.
4. Fall: $2x + 1 = -11$ und $x - z = 2$. Dann ist $x = -6$, $z = -8$ und $y = -11$.

Die Probe bestätigt alle Ergebnisse. Die Gleichung wird demnach genau von den ganzzahligen Paaren $(x, y) \in \{(-6, -11), (-1, -26), (0, 19), (5, 4)\}$ gelöst.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Quellenverzeichnis

(28) alpha, Mathematische Schülerzeitschrift