# 12. Mathematik Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 7
# Saison 1972/1973

Aufgaben und Lösungen

# 12. Mathematik-Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 7
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120711:

Klaus hatte an einem Sonnabend um 12.00 Uhr seine Armbanduhr nach dem Zeitzeichen von Radio DDR eingestellt. Er bemerkte am folgenden Sonntag um 12.00 Uhr beim Zeitzeichen, daß seine Uhr um genau 6 Minuten nachging, vergaß aber, sie richtig zu stellen. Er wollte am folgenden Montag früh genau um 8.00 Uhr fortgehen.

Welche Zeit zeigte seine Uhr zu dieser Uhrzeit an, wenn angenommen wird, daß seine Uhr während der ganzen Zeit gleichmäßig lief?

Aufgabe 120712:

Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen $z$, von denen jede die folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt:

(1) Die Zahl $z$ ist sowohl durch 9 als auch durch 11 teilbar.

(2) Vertauscht man bei der Zahl $z$ die an der Hunderterstelle stehende Ziffer mit der an der Einerstelle stehenden, so erhält man eine neue dreistellige Zahl $z'$, die $\frac{2}{9}$ der Zahl $z$ beträgt.

Aufgabe 120713:

Beweise den folgenden Satz:

Stehen in einem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ($\overline{AD} = \overline{BC}$) die Diagonalen $AC$ und $BD$ senkrecht aufeinander, dann ist die Länge der Mittellinie dieses Trapezes gleich der Länge seiner Höhe!

Aufgabe 120714:

Gegeben sei ein Dreieck $\Delta ABC$. Ein Punkt $C_1$ soll folgende Eigenschaften haben:

(1) Das Dreieck $\Delta ABC_1$ ist flächengleich zu dem Dreieck $\Delta ABC$,

(2) $\overline{AC} = \overline{AC_1}$.

(3) $C \neq C_1$.

a) Gib eine Konstruktion an, durch die man alle Punkte $C_1$ erhalten kann, die die Eigenschaften (1), (2), (3) besitzen!

b) Untersuche, wie die Anzahl der Punkte $C_1$ mit den Eigenschaften (1), (2), (3) von Eigenschaften des gegebenen Dreiecks $\Delta ABC$ abhängt! (Fallunterscheidung)

# 12. Mathematik-Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 7
# Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 120711:

Die Armbanduhr ging in 24 Stunden genau 6 Minuten nach, d.h., in jeder Stunde ging sie den 24. Teil von 6 Minuten, das ist $\frac{1}{4}$ Minute, nach. Da von Sonnabend 12.00 Uhr bis Montag 8.00 Uhr genau 44 Stunden vergangen waren, ging die Uhr wegen $44 \cdot \frac{1}{4} = 11$ mithin 11 Minuten nach, zeigte also 7.49 Uhr, als es genau 8.00 Uhr war.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)*

Lösung 120712:

(I) Angenommen, eine dreistellige natürliche Zahl $z$ habe die Eigenschaften (1) und (2). Wegen (1) und weil 9 und 11 teilerfremd sind, ist $z$ ein Vielfaches von 99. Da $z$ dreistellig ist, können höchstens die Zahlen

$$198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891, 990$$

die Bedingungen (1) und (2) erfüllen.

Von ihnen scheidet die Zahl 990 aus, da aus ihr durch Vertauschen der Einer- mit der Hunderterziffer keine dreistellige Zahl entsteht. Da ferner $z'$ kleiner als $z$ sein soll, scheiden auch die Zahlen 198, 297, 396 und 495 aus. Schließlich muß, da $z' = \frac{2}{9}z$ eine gerade Zahl ist, die Hunderterziffer von $z$ eine gerade Zahl sein, also scheiden auch die Zahlen 594 und 792 aus.

Für die restlichen beiden Zahlen erhält man:

| $z$ | $\frac{2}{9}z$ | $z'$ |
|---|---|---|
| 693 | 154 | 396 |
| 891 | 198 | 198 |

Somit kann nur die Zahl $z = 891$ die Bedingungen (1) und (2) erfüllen.

(II) Eine Probe zeigt, daß sie die Eigenschaften (1), (2) tatsächlich hat.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)*

Lösung 120713:

In dem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ sei $E$ der Schnittpunkt von $AC$ mit $BD$. Ferner sei $F$ der Fußpunkt des von $E$ auf $AB$ und $G$ der Fußpunkt des von $E$ auf $CD$ gefällten Lotes. Dann ist $FG$ eine Höhe des Trapezes.

Wegen $\overline{AB} = \overline{AB}$, $\sphericalangle BAD \cong \sphericalangle ABC$, $\overline{AD} = \overline{BC}$ gilt $\Delta ABD \cong \Delta ABC$ (sws) also $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD$.

Folglich ist $\Delta AEB$ gleichschenklig mit $\overline{AE} = \overline{EB}$ und daher $EF$ Seitenhalbierende in diesem Dreieck. Da sich $AC$ und $BD$ in $E$ rechtwinklig schneiden, hat der Basiswinkel $\sphericalangle EAB$ in diesem Dreieck eine Größe von 45°. Daher ist auch $\Delta AEF$ gleichschenklig-rechtwinklig mit $\overline{EF} = \overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Analog gilt im Dreieck $\Delta EGD$ $\overline{EG} = \overline{DG} = \frac{1}{2}\overline{DC}$.

Daher beträgt die Länge der Mittellinie des Trapezes $ABCD$

$$\frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{DC}\right) = \overline{EF} + \overline{EG} = \overline{FG}. \ \square$$

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)*

Lösung 120714:

(I) Angenommen, ein Punkt $C_1$ habe die Eigenschaften (1), (2), (3). Dann gilt: Die Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta ABC_1$ haben die Seite $AB$ gemeinsam. Wegen (1) stimmen sie daher auch in der zu dieser Seite gehörenden Höhenlänge überein.

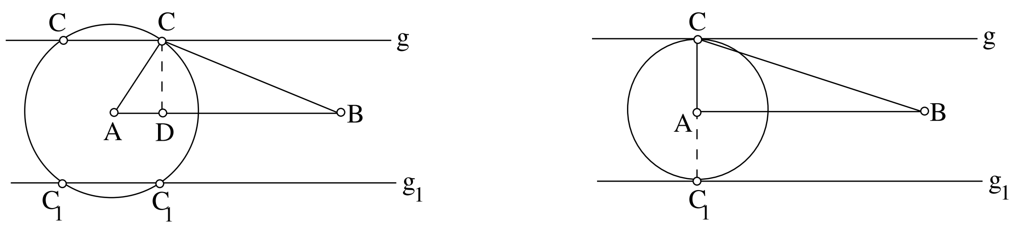
Folglich liegt der Punkt $C_1$ auf einer der Parallelen zu $AB$, die denselben Abstand von $AB$ haben wie Punkt $C$. Wegen (2) liegt $C_1$ ferner auf dem Kreis mit dem Radius $\overline{AC}$ um $A$.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Punkt $C_1$ nur dann die Eigenschaften (1), (2), (3) hat, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Wir zeichnen die Parallele $g$ zu $AB$ durch $C$ und die von $g$ verschiedene Parallele $g_1$ zu $AB$, die denselben Abstand von $AB$ hat wie $g$. Wir schlagen um $A$ mit dem Radius $\overline{AC}$ den Kreis $k$. Schneidet oder berührt er $g$ oder $g_1$ noch in einem von $C$ verschiedenen Punkt, so sei dieser $C_1$ genannt.

(III) Der Beweis, daß jeder so konstruierte Punkt $C_1$ den Bedingungen (1) bis (3) entspricht, folgt aus (II) sowie daraus, daß die Dreiecke $\Delta ABC$ und $\Delta ABC_1$ in der zur (gemeinsamen) Seite gehörenden Höhenlänge übereinstimmen.

(IV) Es sei $D$ der Fußpunkt des von $C$ auf die Gerade durch $A$ und $B$ gefällten Lotes. Nun unterscheiden wir folgende zwei Fälle:




*1. Fall:* Ist $\Delta ABC$ bei $A$ nicht rechtwinklig, so ist $D \neq A$, also $\Delta ADC$ ein bei $D$ rechtwinkliges Dreieck und darin $AC$ die längste Seite (Hypotenuse), $DC$ eine der anderen Seiten (Kathete), also $\overline{DC} < \overline{AC}$.

Der Abstand, den $g$ und $g_1$ von $AB$ und folglich von $A$ haben, ist also kleiner als der Radius von $k$. Daher schneidet $k$ jede der Parallelen $g$, $g_1$ in genau zwei Punkten. Von den so entstehenden vier Schnittpunkten ist genau einer $C$.

Die gesuchte Anzahl der Punkte $C_1$, die (1), (2), (3) erfüllen, beträgt daher 3.

*2. Fall:* Ist $\Delta ABC$ bei $A$ rechtwinklig, so ist $D = A$, also $\overline{DC} = \overline{AC}$. Der Abstand, den $g$ und $g_1$ von $AB$ und folglich von $A$ haben, ist also gleich dem Radius von $k$. Daher berührt $k$ jede der Parallelen $g$, $g_1$ in genau einem Punkt. Von den so entstehenden zwei Berührungspunkten ist genau einer $C$.

Die gesuchte Zahl der Punkte $C_1$, die (1), (2), (3) erfüllen, beträgt daher 1.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)*

## Quellenverzeichnis

**(14)** ”a+b = b+a” - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.