13. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1973/1974

Aufgaben und Lösungen

13. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130921:

Eine Turmuhr zeigt genau 13 Uhr an. Stellen Sie fest, wie oft insgesamt bei gleichförmiger Zeigerbewegung der Minutenzeiger und der Sekundenzeiger innerhalb der nächsten 12 Stunden einen rechten Winkel miteinander bilden!

Aufgabe 130922:

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC, in dem die Winkel ABC und BAC die Größe 90° bzw. 60° haben, schneide die Halbierende des Winkels BAC die Gegenseite im Punkt D.

Beweisen Sie, daß D die Seite BC im Verhältnis 1 : 2 teilt!

Aufgabe 130923:

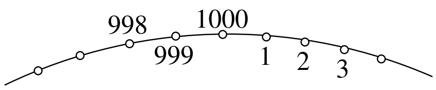
Ein konvexes gleichschenkliges Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$; $\overline{AD} = \overline{BC}$; $\overline{AB} > \overline{CD}$) soll folgende Eigenschaften haben:

Es soll sich einem Kreis mit dem Radius $r = 12$ cm umbeschreiben lassen; der Umfang des Trapezes soll $u = 100$ cm betragen.

Untersuchen Sie, ob es solche Trapeze gibt und berechnen Sie die Seitenlängen jedes derartigen Trapezes!

Aufgabe 130924:

Man denke sich eine Kreislinie in 1 000 gleich lange Teilbögen zerlegt und jeden der 1 000 Teilpunkte der Reihe nach mit den natürlichen Zahlen 1 bis 1 000 bezeichnet.



Es sollen nun nacheinander die Zahl 1 und jede weitere 15. Zahl, also 1, 16, 31, 46, ..., durchgestrichen werden. Dabei sind bei wiederholten "Umläufen" auch die bereits gestrichenen Zahlen mitzuzählen. Dieses Durchstreichen ist so lange fortzusetzen, bis nur noch Zahlen durchgestrichen werden müßten, die bereits gestrichen sind.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Zahlen, die bei diesem Verfahren nicht durchgestrichen werden!

13. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 130921:

In 12 Stunden macht der Minutenzeiger genau 12 Umdrehungen, der Stundenzeiger genau eine Umdrehung. Der Stundenzeiger wird während dieser einen Umdrehung vom Minutenzeiger genau 11 mal überrundet.

Zwischen je zwei Überrundungen bilden die Zeiger genau zweimal einen rechten Winkel. In 12 aufeinanderfolgenden Stunden bilden daher die Zeiger 22 mal einen rechten Winkel miteinander.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (28)

Lösung 130922:

Spiegelt man das Dreieck ABC an BC, wobei das Bild von A der Punkt A' sei, so erhält man das gleichseitige Dreieck $AA'C$. Darin ist BC Halbierende der Seite AA'.

Verlängert man AD über D hinaus bis zum Schnittpunkt S mit der Seite $A'C'$, dann ist AS Seitenhalbierende von $A'C'$, da im gleichseitigen Dreieck die Halbierende jedes Winkels mit der Halbierenden seiner Gegenseite zusammenfällt.

Da sich nun in jedem Dreieck die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 schneiden, ist die Behauptung bewiesen.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (28)

Lösung 130923:

Da das Trapez einen Inkreis hat, ist es ein Tangentenviereck, sodass die Summe der Längen jedes Paares seiner gegenüberliegender Seiten gleich ist. Also gilt $|AB| + |CD| = |AD| + |BC| = \frac{u}{2} = 50$ cm. Aufgrund der Gleichschenkligkeit ist dann sogar schon $|AD| = |BC| = 25$ cm bekannt.

Die Berührradien des Inkreises an AB sowie CD stehen jeweils senkrecht auf den Seiten, sodass sie aufgrund der Parallelität der beiden Seiten selbst parallel zueinander liegen.

Da beide Berührradien durch den Mittelpunkt des Inkreises verlaufen, ergänzen sie sich also zu einem Durchmesser, der senkrecht auf AB und CD steht, sodass diese beiden Parallelen den Abstand $2r = 24$ cm haben. Insbesondere sind sie damit auch kürzer als $|AD| = |BC| = 25$ cm.

Seien L_C und L_D die Fußpunkte der Lote von C bzw. D auf AB. dann sind diese Lote $|CL_C|$ und $|DL_D|$ jeweils auch gleich $24cm$, also gleich lang. Damit sind die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle BL_CC$ und $\triangle AL_DD$ zueinander nach dem Kongruenzsatz Ssw kongruent. Da die beiden entsprechenden Seiten CL_C und DL_D zueinander parallel sind sowie die entsprechenden Seiten BL_C und AL_D beide auf der Geraden AB liegen, gibt es also nur zwei mögliche Lagebeziehungen: Entweder sind auch die dritten Seiten AD und BC dieser beiden Dreiecke zueinander parallel, oder aber sie gehen durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Strecke AB ineinander über, zeigen also in verschiedene Richtungen.

Im ersten dieser beiden Fälle sind aber im Viereck $ABCD$ jeweils gegenüberliegende Seiten parallel, sodass es sich um ein Parallelogramm handelt. Damit folgt dann auch $|AB| = |CD|$, was im Widerspruch zur Aufgabe steht.

Im zweiten Fall müssen die Lotfußpunkte L_C und L_D also beide außerhalb oder beide innerhalb der strecke AB liegen, wobei ersteres auf $|CD| > |AB|$ führen würde, was im Widerspruch zur Aufgabenstellung steht. Also befinden sich beide Lotfußpunkte im Inneren der Strecke AB. Es gilt damit $|AB| = |AL_D| + |L_DL_C| + |L_CB| = |L_DL_C| + 2|L_CB|$, letzteres aufgrund der Kongruenz der Dreiecke $\triangle BL_CC$ und $\triangle AL_DD$.

Im Viereck L_DL_CCD sind aber nun gegenüberliegende Seiten parallel, sodass es sich um ein Parallelogramm handelt und $|L_DL_C| = |CD|$ folgt.

Es verbleibt, $|L_CB|$ zu berechnen. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle BL_CC$ gilt $|L_CC|^2 + |BL_C|^2 = |BC|^2$, also $|L_CB| = \sqrt{25^2 - 24^2}cm = \sqrt{49}cm = 7cm.$

Setzt man dies ein, erhält man $|AB| = |CD| + 2 \cdot 7$ cm und zusammen mit $|AB| + |CD| = 50$ cm schließlich $|AB| = 32$ cm und $|CD| = 18$ cm. Für ein solches Trapez gilt damit, dass seine Kantenlängen $|AB| = 32$ cm, $|BC| = 25$ cm, $|CD| = 18$ cm und $|AD| = 25$ cm betragen.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 130924:

Damit eine Zahl $1 \leq n \leq 1000$ gestrichen wird, muss es nicht-negative ganze Zahlen u und q geben, sodass $n + 1000 \cdot u = 1 + 15 \cdot q$ ist. Dabei beschreibt u die Anzahl der bisher vollständigen Umläufe um den Kreis und $1 + 15 \cdot q$ beschreibt jede 15. Zahl, beginnend mit 1, wenn einfach immer weiter gezählt wird.

Betrachtet man, welchen Rest beide Seiten dieser Gleichung bei der Teilung durch 5 lassen, so muss dies 1 sein, da $15q$ durch 5 teilbar ist. Da aber auch $1000u$ durch 5 teilbar ist, muss auch n den Rest 1 bei der Teilung durch 5 lassen. Es gibt also eine ganze Zahl k mit $0 \leq k < 200$, sodass $n = 5k+1$ gilt. Setzt man dies in die Gleichung ein, erhält man, dass die Zahl $5k + 1$ genau dann gestrichen wird, wenn es nicht-negative ganze Zahlen q und u gibt, sodass $5k + 1 + 1000u = 1 + 15q$ bzw. nach Subtraktion von 1 und Division durch 5 die äquivalente Gleichung $k + 200u = 3q$ erfüllt ist.

Diese nicht-negativen ganzen Zahlen q und u existieren aber für jedes nicht-negative k: Ist k durch 3 teilbar, wähle man $u = 0$ und $q = \frac{k}{3}$. Lässt k den Rest 1 bei der Division durch 3, so ist $k + 200$ durch 3 teilbar und man kann $u = 1$ sowie $q = \frac{k+200}{3}$ wählen. Und lässt abschließend k den Rest 2 bei der Division durch 3, ist $k + 400$ durch 3 teilbar, sodass man $u = 2$ und $q = \frac{k+2\cdot 200}{3}$ wählen kann.

Zusammen erhält man also, dass genau die Zahlen $1 \leq n \leq 1000$ gestrichen werden, die sich als $n = 5k + 1$ mit einer nicht-negativen ganzen Zahl k mit $0 \leq k < 200$ darstellen lassen. Das sind aber genau 200 Stück, sodass von den 1000 Zahlen genau 800 nicht gestrichen werden.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Quellenverzeichnis

(28) alpha, Mathematische Schülerzeitschrift