13. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1973/1974

Aufgaben und Lösungen

13. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130931:

Wie man an Beispielen sehen kann, gibt es Paare (x, y), worin x und y je eine zweistellige natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft sind:

Tauscht man die Ziffern dieser Zahl gegeneinander aus und addiert 9 zu der so entstandenen Zahl, so erhält man die andere Zahl des Paares. (Ein solches Paar ist z.B. (25; 61), denn es gilt $52+9 = 61$ und $16+9 = 25$.)

Hinweis: Entsteht beim Vertauschen der Ziffern eine mit 0 beginnende Ziffernfolge (etwa aus 30 die "03"), so ist statt dessen für die weiteren Operationen die (einstellige) Zahl zu nehmen, die nach dem Streichen der Null entsteht (in unserem Beispiel "3").

Wir nennen die Zahlen x, y eines solchen Paares $(x; y)$ einander zugeordnet.

a) Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die als Elemente solcher Paare auftreten können!

b) Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen, die auf diese Weise sich selbst zugeordnet sind!

Aufgabe 130932:

Man gebe alle natürlichen Zahlen n an, für die $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ durch 10 teilbar ist!

Aufgabe 130933:

Auf einer Geraden g seien in dieser Reihenfolge sechs Punkte A, B, C, D, E, F gelegen. Ein Punkt P außerhalb von g sei so gelegen, daß PC das Lot von P auf g ist. Dabei gelte $\overline{PC} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF}$.

Man beweise, daß dann $\overline{\sphericalangle APF} = 135°$ gilt.

Hinweis: Es genügt nicht, diese Gleichheit nur mit Rechentafelgenauigkeit nachzuweisen.

Aufgabe 130934:

In einer Ebene sollen regelmäßige n-Ecke (mit einheitlicher Eckenzahl) so um einen Eckpunkt herum aneinandergelegt werden, daß die Summe der Größen der an diesem Eckpunkt liegenden Innenwinkel 360° beträgt.

Geben Sie alle natürlichen Zahlen n an, für die das möglich ist; geben Sie dabei jeweils die Anzahl der insgesamt benötigten n-Ecke an!

Aufgabe 130935:
Beweisen Sie den folgenden Satz!

Wenn für rationale Zahlen a, b, c mit a, b, $c \neq 0$ und $a + b + c \neq 0$ die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$$

gilt, so sind zwei der Zahlen a, b, c zueinander entgegengesetzt.

(Rationale Zahlen x, y heißen genau dann zueinander entgegengesetzt, wenn $x = -y$ gilt.)

Aufgabe 130936:
Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D und der Kantenlänge a. Ein Punkt D' soll folgende Eigenschaften haben:

a) Das Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D' ist volumengleich zu dem gegebenen Tetraeder,

b) $\overline{BD'} = \overline{CD'} = a$,

c) $\overline{AD'} \neq a$.

Man untersuche, ob es solche Punkte D' gibt, und ermittle für jedes solche D' die Länge der Kante AD'.

13. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 130931:

a) Sind $10a + b$ und $10c + d$ mit $a, b, c, d \in \{0; 1; 2; \cdot; 9\}$ und $a \neq 0$, $c \neq 0$ (sonst würde es sich nicht um zweistellige Zahlen handeln) die beiden Zahlen eines solchen Paares, so gilt $10c + d = 10b + a + 9$. Wegen $1 \leq a < 10$ ist $10 \leq a + 9 < 19$, sodass die Zehnerziffer von $10b + a + 9$ also $b + 1$ und die Einerziffer $a + 9 - 10 = a - 1$ ist. Wir erhalten also $c = b + 1$ und $d = a - 1$. Da $a \geq 1$ ist, ist d auf jeden Fall eine Ziffer, sodass hier keine Zusatzbedingungen entstehen. Jedoch erhalten wir wegen $c = b + 1$, dass $b \leq 8$ sein muss, denn für $b = 9$ erhielte man $c = 10$, was keine Ziffer mehr ist.

   Tatsächlich sind diese Bedingungen nicht nur notwendig, sondern sogar schon hinreichend: Wendet man das Verfahren auf $10c + d$ an, so erhält man die Zahl $10d + c + 9 = 10(a - 1) + (b + 1) + 9 = 10a - 10 + b + 9 + 1 = 10a + b$; also die Ausgangszahl.

   Es können also genau diejenigen zweistelligen Zahlen Elemente eines solchen Paares sein, die als Einerziffer keine 9 besitzen.

b) Mit obigen Bezeichnungen muss dann $a = c = b + 1$ und $b = d = a - 1$ gelten, sodass dies nur für die Zahlen 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87 und 98 der Fall sein kann. Die Probe bestätigt jeweils, dass diese Zahlen sich auch jeweils selbst zugeordnet werden.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 130932:

Es ist $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$. Weiterhin ist $n^2 + 2$ gerade genau dann, wenn auch n gerade ist. Wegen $(5k \pm 1)^2 + 2 = 25k^2 \pm 10k + 1 + 2 = 5 \cdot (5k^2 \pm 2k) + 3$ und $(5k \pm 2)^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 4 + 1 = 5 \cdot (5k^2 \pm 4k + 1)$ ist $n^2 + 2$ genau dann durch 5 teilbar, wenn n den Rest 2 oder 3 bei der Teilung durch 5 lässt.

Damit ist $3n(n^2 + 2)$ genau dann durch 5 teilbar, wenn n den Rest 0 (dann ist n durch 5 teilbar), 2 oder 3 (dann ist $n^2 + 2$ durch 5 teilbar) bei der Teilung durch 5 lässt.

Außerdem ist $3n(n^2 + 2)$ genau dann durch 2 teilbar, wenn es n auch ist.

Zusammen folgt (wegen ggT(2,5)=1), dass $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n(n^2+2)$ genau dann durch 10 teilbar ist, wenn es durch 2 und 5 teilbar ist, also n die Endziffer 0, 2 oder 8 besitzt.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 130933:

Um die folgende Notation zu vereinfachen, setzen wir $|PC| = 1$. Durch den Satz von Pythagoras erhalten wir im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ACP$ die Kantenlänge $|AP| = \sqrt{|AC|^2 + |PC|^2} = \sqrt{5}$ und analog im rechtwinkligen Dreieck $\triangle CFP$ die Kantenlänge $|FP| = \sqrt{|CF|^2 + |PC|^2} = \sqrt{10}$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AFP$ kann einerseits ermittelt werden zu $\frac{1}{2} \cdot |AF| \cdot |PC| = \frac{5}{2}$ und andererseits auch als $\frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot |FP| \cdot \sin(\sphericalangle AFP) = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\sphericalangle AFP)$, sodass man $\sin(\sphericalangle AFP) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ erhält.

Es ist $|AF| = 5 = \sqrt{25} > \sqrt{10} = |FP| > \sqrt{5} = |AP|$, sodass AF die längste Seite im Dreieck $\triangle AFP$ ist. Ihr gegenüber liegt damit auch der größte Innenwinkel dieses Dreiecks, sodass $\sphericalangle AFP > 60° > 45°$ gilt. also muss $\sphericalangle AFP = 135°$ gelten, da dies der einzige weitere Wert im Intervall $[0, 180°]$ ist, an welchem der Sinus den Wert $\frac{\sqrt{2}}{2}$ annimmt, $\square$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 130934:

Sei $n \geq 3$. Dann betragen die Innenwinkel im regelmäßigen n-Eck jeweils $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$. Für $n = 3; 4; 5$ und 6 ergeben sich so Innenwinkel von 60°, 90°, 108° und 120°.

Offensichtlich ist wegen $\frac{n-2}{n} = 1 - \frac{2}{n}$ die Größe der Innenwinkel eine in n streng monoton steigende Funktion, sodass für alle $n > 6$ gilt, dass die Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks größer als $120° = \frac{1}{3} \cdot 360°$, aber wegen $\frac{n-2}{n} < 1$ auch kleiner als $180° = \frac{1}{2} \cdot 360°$ sind.

Damit kann für diese n (also $n > 6$) keine Anzahl von regelmäßigen n-Ecken überschneidungsfrei an einer Ecke zusammengelegt werden. Ähnlich sieht es für $n = 5$ aus, da $\frac{360°}{108°} = \frac{10}{3} \notin \mathbb{Z}$ ist. Es verbleiben $n = 3; 4$ und 6, wo jeweils 6; 4 bzw. 3 regelmäßige n-Ecke überschneidungsfrei in einer Ecke aneinandergefügt werden können.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 130935:

Durch Multiplikation mit $abc(a + b + c)$ geht die Gleichung äquivalent über in

$$abc = (a + b + c) \cdot (bc + ac + ab) = abc + b^2c + bc^2 + a^2c + abc + ac^2 + a^2b + ab^2 + abc$$

bzw. nach Subtraktion von abc in

$$0 = a^2b + a^2c + abc + ac^2 + ab^2 + abc + b^2c + bc^2 = (a + b) \cdot (ab + ac + bc + c^2) = (a + b)(a + c)(b + c)$$

Dieses Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, also $a = -b$, $a = -c$ oder $b = -c$ gilt, sodass auf jeden Fall mindestens zwei der drei Zahlen a, b, c einander entgegengesetzt sind.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 130936:

Ist h die Höhe des Tetraeders $ABCD$, so folgt aus Eigenschaft a), dass D' in einer zur Grundfläche ABC parallelen Ebene ϵ mit Abstand h liegt. Prinzipiell sind dabei zwei Möglichkeiten denkbar: Entweder es liegt ϵ im gleichen von der Grundfläche erzeugten Halbraum wie D (dann liegt D auf ϵ), oder die Ebene ϵ liegt im entsprechend anderen Halbraum. Da aber die weiteren Bedingungen nicht davon abhängen, welche der beiden Fälle eintritt, ergeben sich symmetrische Strukturen, sodass wir o.B.d.A. annehmen können, dass ϵ im öberen Halbraumßusammen mit D liegt, sodass D und D' beides Punkte auf ϵ sind.

Nach Bedingung b) liegt D' auf der Oberfläche der beiden Kugeln um die Punkte B und C mit Radius a. Da $h < a$ gilt, werden diese beiden Kugeln durch ϵ geschnitten (und nicht nur berührt), sodass sich zwei Kreise $k_B; k_C$ als Schnittfiguren in der Ebene ϵ ergeben. Diese beiden Kreise schneiden sich nun in bis zu zwei Punkten, wovon einer D ist (da auch $|BD| = |CD| = a$ gilt) und der andere (falls existent) D'.

Einen zweiten Schnittpunkt gäbe es nur dann nicht, wenn sich die Kreise in D nur berühren würden. Da die Mittelpunkte M_B und M_C der beiden Kreise wie die Kugelmittelpunkte B und C den Abstand a haben (da ϵ parallel zur Grundfläche ist), müssten deren gleich große Radien sich also zu a addieren und so würde im rechtwinkligen Dreieck $\triangle BM_BD$ nach dem Satz des Pythagoras die Beziehung $|BM_B|^2 + |M_BD|^2 = |BD|^2$

bzw. $h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$, also $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ folgen. Im regelmäßigen Tetraeder ist aber $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$, sodass sich die Kreise also nicht nur berühren und es also neben D noch einen zweiten Punkt D' gibt, der die Bedingungen a) und b) erfüllt.

Da $|AD| = a$ ist, kommt nach Bedingung c) auch nicht $D = D'$ Frage. Berechnen wir nun für den zweiten Schnittpunkt D' der beiden Kreise den Abstand zu A:

Die beiden Schnittpunkte zweier Kreise liegen symmetrisch zur Verbindungsgeraden der beiden Mittelpunkte. Da die Ebene ϵ_1, die senkrecht zur Grundfläche und durch die Gerade BC verläuft, auch senkrecht auf ϵ steht sowie dort durch die Gerade M_BM_C verläuft, geht also D durch Spiegelung an ϵ_1 in D' über.

Aufgrund der Orthogonalität von ϵ_1 sowohl zu ϵ wie auch zur Grundfläche geht damit aber auch der Lotfußpunkt L_D von D auf die Grundfläche durch Spiegelung an ϵ_1 in den Lotfußpunkt $L_{D'}$ von D' auf die Grundfläche über: Die Lote sind jeweils parallel zur Spiegelungsebene. Bei Betrachtung nur in der Grundfläche geht also L_D durch Spiegelung an der Geraden BC in $L_{D'}$ über.

Da im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ die Seitenhalbierenden und Höhen zusammenfallen und L_D der Schwerpunkt dieses Dreiecks ist, steht die Gerade AL_D als Seitenhalbierende und zugleich Höhe senkrecht auf BC und verläuft durch deren Mittelpunkt M. Insbesondere liegt also auch der Spiegelungspunkt $L_{D'}$ auch auf dieser Geraden und es gilt

$$|AL_{D'}| = |AL_D| + 2 \cdot |L_D M| = \frac{2}{3}s + 2 \cdot \frac{1}{3}s = \frac{4}{3}s$$

wobei s die Länge der Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge a sei. Für diese gilt im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABM$ die Beziehung $s^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$ und damit $s^2 = \frac{3}{4}a^2$. Einsetzen liefert $|AL_{D'}|^2 = \frac{16}{9}s^2 = \frac{4}{3}a^2$.

Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle AL_{D'}D'$ gilt abschließend nun

$$|AD'|^2 = |AL_{D'}|^2 + |L_{D'}D'|^2 = \frac{4}{3}a^2 + h^2 = \frac{4}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^2 = 2a^2$$

also $|AD'| = \sqrt{2}a$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix