13. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1973/1974

Aufgaben und Lösungen

13. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 131011:

Ermitteln Sie alle Mengen $\{a, b, c\}$ aus rationalen Zahlen a, b, c mit der Eigenschaft, daß $\left\{\frac{10}{3}; -\frac{5}{12}; \frac{9}{4}\right\}$ die Menge der Summen aus je zwei Zahlen von $\{a, b, c\}$ ist!

Aufgabe 131012:

Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm und M der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Ferner seien S_1, S_2, S_3, S_4 die Schwerpunkte der Dreiecke ABM, BCM, CDM, DAM.

Man beweise, daß dann $S_1S_2S_3S_4$ ein Parallelogramm ist!

Aufgabe 131013:

Jemand möchte als Rechenaufgabe stellen, aus der Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer angegebenen natürlichen Zahl n genau eine angegebene natürliche Zahl x wegzulassen und die übrigen $n - 1$ Zahlen zu addieren. Er möchte die Zahlen n und x so angeben, daß als Ergebnis dieser Rechenaufgabe die Summe 448 entsteht.

Man ermittle alle Möglichkeiten, x und n in dieser Weise anzugeben!

Aufgabe 131014:

Jens und Dirk spielen das folgende Spiel

Sie wählen abwechselnd für je einen Koeffizienten einer durch $f(x) = ax^2 + bx + c$ zu definierenden Funktion f reelle Zahlen a ($\neq 0$), b, c in dieser Reihenfolge. Jens beginnt. Liegen nach erfolgter Wahl von a, b, c die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit der x-Achse symmetrisch zum Koordinatenursprung, so hat Dirk gewonnen, liegen sie unsymmetrisch, Jens. Das Spiel endet genau dann unentschieden, wenn f keine Nullstellen hat.

Es ist zu untersuchen, ob es sich bei diesem Spiel um ein "ungerechtes Spiel" handelt. Als ein ungerechtes Spiel wird ein Spiel bezeichnet, bei dem einer der Spieler bei allen Spielmölichkeiten des anderen den Gewinn erzwingen kann.

13. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 131011:
Zu lösen sind die Gleichungssysteme

I. $a + b = 10/3$
$a + c = -5/12$
$b + c = 9/4$

II. $a + b = 10/3$
$a + c = 9/4$
$b + c = -5/12$

III. $a + b = -5/12$
$a + c = 10/3$
$b + c = 9/4$

IV. $a + b = -5/12$
$a + c = 9/4$
$b + c = 10/3$

V. $a + b = 9/4$
$a + c = 10/3$
$b + c = -5/12$

VI. $a + b = 9/4$
$a + c = -5/12$
$b + c = 10/3$

Jedes dieser Gleichungssysteme hat die Lösungen 3, -3/4 und 1/3. Die gesuchte Menge ist also $\{-3/4, 1/3, 3\}$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Matthias Lösche

Lösung 131012:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (12)

Lösung 131013:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (12)

Lösung 131014:
Die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ sind nach der Lösungsformel bekanntlich:

$$x_{1,2} = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sollen sie symmetrisch zum Koordinatenursprung liegen, so muß gelten: $x_1 = -x_2$. Setzt man dies in die Lösungsformel ein, ergibt sich:

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dies führt zu $-b = b$, was genau dann erfüllt ist, wenn $b = 0$. Das heißt, daß, falls Nullstellen existieren, diese immer symmetrisch zum Ursprung liegen, wenn b von Dirk mit dem Wert $b = 0$ gewählt wird. Dirk kann dennoch nicht den Sieg erzwingen, da Jens mit der Wahl von c für beliebige Werte von a und b erzwingen kann, daß es keine Nullstellen gibt. Das ist genau dann der Fall, wenn der Ausdruck unter der Wurzel kleiner als Null ist: $b^2 - 4ac < 0$. Damit handelt es sich um kein ungerechtes Spiel.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (0)

Quellenverzeichnis

(0) Unbekannt

(12) Buch: Neue Mathematik-Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1990, Aulis-Verlag