13. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1973/1974

Aufgaben und Lösungen

13. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 131211:

Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10 000 000 000.

Man untersuche, ob die Anzahl derjenigen Zahlen (aus $\mathfrak{M}$), bei deren dekadischer Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer, gleich oder kleiner ist als die Anzahl derjenigen Zahlen aus $\mathfrak{M}$, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt.

Aufgabe 131212:

Aus einem geraden Kreiskegelstumpf soll ein Kegelkörper herausgeschnitten werden, dessen Spitze der Mittelpunkt der (größeren) Grundfläche des Kegelstumpfes ist und dessen Grundfläche mit der Deckfläche des Kegelstumpfes zusammenfällt.

Man ermittle diejenigen Werte des Verhältnisses des Radius der Grund- zum Radius der Deckfläche des Kegelstumpfes, für die das Volumen des entstehenden Restkörpers sechsmal so groß ist wie das des ausgeschnittenen Kegelkörpers.

Aufgabe 131213:

Es seien a und n natürliche Zahlen mit $a \geq 2$ und $n \geq 2$.

Man beweise: Die Menge $\mathfrak{M}= \{a, a^2, ..., a^n\}$ ist nicht die Vereinigung zweier solcher elementefremder nichtleerer Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, für die die Summe der in $\mathfrak{M}_1$ enthaltenen Zahlen gleich der Summe der in $\mathfrak{M}_2$ enthaltenen Zahlen ist.

Aufgabe 131214:

Gegeben seien k reelle Zahlen a_1, a_2, ... , a_k (k natürliche Zahl, $k \geq 1$), für die

(1) $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k$ und

(2) $a_1 + a_2 + ... + a_k = 1$ gilt.

Man beweise, daß dann für alle natürlichen Zahlen n mit $0 < n \leq k$ die Ungleichung

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leq \frac{1}{k} \quad \text{erfüllt ist.}$$

13. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 131311:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (12)

Lösung 131312:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (12)

Lösung 131313:

Angenommen, die Menge $\mathfrak{M}$ kann so in in zwei elementfremde Teilmengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ aufgeteilt werden, daß die jeweiligen Elementesummen gleich groß sind, dann ergibt die Differenz dieser beiden Summen Null. Jedes Element dieser Gleichung der Menge $\mathfrak{M}_1$ hat dann ein positives und das der Menge $\mathfrak{M}_2$ ein negatives Vorzeichen und läßt sich wie folgt schreiben:

$$\pm a \pm a^2 \pm a^3 \pm ... \pm a^n = 0$$

Nach Division durch a^2 (was nicht Null sein kann, da $a \geq 2$ ist) erhält man

$$\pm\frac{1}{a} \pm 1 \pm a \pm a^2 \pm ... \pm a^{n-2} = 0$$
$$\pm 1 \pm a \pm a^2 \pm ... \pm a^{n-2} = \mp\frac{1}{a}$$

Die linke Seite ist die Summe mehrerer ganzzahliger (positiver oder negativer) Zahlen, die rechte Seite ist auf jeden Fall nicht ganzzahlig ($\frac{1}{n}$ ist für $n \geq 2$ nie ganzzahlig). Aus diesem offensichtlichen Widerspruch folgt das Gegenteil der Annahme und mithin das zu Beweisende.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Adrian Hutter

Lösung 131314:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (12)

Quellenverzeichnis

(12) Buch: Neue Mathematik-Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1990, Aulis-Verlag