14. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1974/1975

Aufgaben und Lösungen

14. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 140711:

Klaus behauptet, er habe in seiner Geldtasche genau 17 Münzen mit einem Gesamtwert von 34 Pfennig.

Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche Anzahlen der Münzen einer jeden Sorte Klaus hiernach besitzen kann! Es sei dabei vorausgesetzt, daß nur Münzen der zur Zeit gültigen Währung der DDR in Betracht kommen.

Aufgabe 140712:

Auf einer horizontalen Ebene steht ein oben offener quaderförmiger Kasten mit den inneren Grundkantenlängen 5 cm und 4 cm, der bis zu einer Höhe von 7 cm mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Über dem Flüssigkeitsspiegel befindet sich ein Würfel mit 2 cm Kantenlänge derart, daß seine untere Fläche den Flüssigkeitsspiegel berührt. Dabei werde der Flüssigkeitsspiegel stets als horizontale Ebene angenommen, und es werde vorausgesetzt, daß eine Würfelfläche stets parallel zum Flüssigkeitsspiegel ist. Ferner soll die Adhäsion nicht berücksichtigt werden. Der Würfel wird nun soweit gesenkt, bis seine Deckfläche mit dem Flüssigkeitsspiegel in derselben Ebene liegt.

Ermittle, um wieviel Zentimeter er zu diesem Zweck insgesamt gesenkt werden muß!

Aufgabe 140713:

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 3,2$ cm, $a = 5,6$ cm und $h_a = 4,4$ cm!

Dabei sei r die Länge des Umkreisradius, a die Länge der Seite BC und h_a die Länge der zur Seite BC gehörenden Höhe des Dreiecks.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist, wobei die anzufertigende Zeichnung mit verwendet werden darf!

Aufgabe 140714:

Beweise folgende Sätze:

a) Wenn S der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks ABC ist, dann haben die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt.

b) Wenn S ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC ist, für den die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt haben, dann ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC.

14. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 140711:

Der genannte Betrag kann sich höchstens aus 1-Pfennigstücken, 5-Pfennigstücken, 10-Pfennigstücken und 20-Pfennigstücken zusammensetzen, da es in der zur Zeit gültigen Währung der DDR keine anderen Münzen bis zu einem Wert von 34 Pfennig gibt.

Angenommen, Klaus hätte ein 20-Pfennigstück, dann hätten die restlichen 16 Münzen einen Gesamtwert von 14 Pfennig. Das ist nicht möglich. Infolgedessen kann Klaus kein 20-Pfennigstück in seiner Geldtasche haben.

Angenommen, Klaus hätte mehr als ein 10-Pfennigstück, dann hätte er höchstens noch 15 weitere Münzen, deren Gesamtwert höchstens 14 Pfennig betragen könnte; das ist wiederum nicht möglich. Somit kann Klaus in seiner Geldtasche an 10-Pfennigstücken höchstens eines haben.

Angenommen, Klaus hätte kein 10-Pfennigstück. Hätte er dann 5-Pfennigstücke in der Anzahl x, so hätte er 1-Pfennigstücke in der Anzahl $17 - x$, und es wäre $5x + 17 - x = 34$, also $4x = 17$. Das ist nicht möglich, da 17 nicht durch 4 teilbar ist.

Daher verbleibt nur die Möglichkeit, daß Klaus in seiner Geldtasche genau ein 10-Pfennigstück und den Restbetrag in anderen Münzen hat. Hat er nun 5-Pfennigstücke in der Anzahl x, so hat er dann 1-Pfennigstücke in der Anzahl $16 - x$. Daraus folgt $5x + 16 - x = 24$, also $4x = 8$ und somit $x = 2$.

Falls die von Klaus gemachte Behauptung richtig ist, muß er in seiner Geldtasche genau ein 10-Pfennigstück, genau zwei 5-Pfennigstücke und genau vierzehn 1-Pfennigstücke haben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

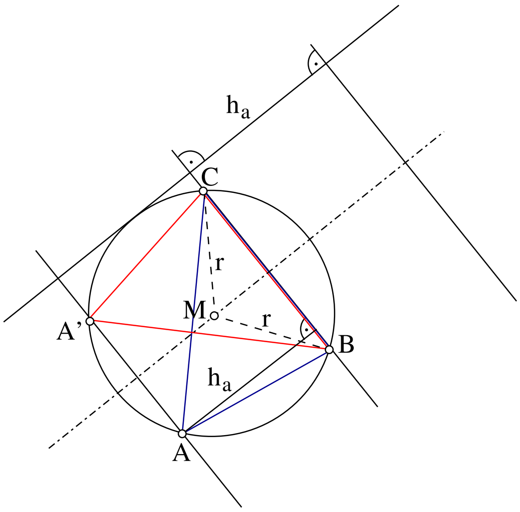
Lösung 140712:

Der Würfel hat ein Volumen von $8\,\text{cm}^3$. Diese $8\,\text{cm}^3$ sind, wenn er gemäß den Bedingungen der Aufgabe gesenkt ist, gleich dem Inhalt eines Quaders Q oberhalb des ursprünglichen Flüssigkeitsquaders und mit gleicher Grundfläche wie dieser. Da die Grundfläche einen Inhalt von $20\,\text{cm}^2$ hat, hat Q die Höhenlänge $\frac{8}{20}\,\text{cm} = 0,4\,\text{cm}$. Nach den Bedingungen der Aufgabe ist der Würfel so weit gesenkt worden, daß seine Deckfläche mit der obersten Fläche von Q in derselben Ebene liegt, d.h. um insgesamt $(2 - 0,4)\,\text{cm} = 1,6\,\text{cm}$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 140713:

(I) Angenommen, ΔABC sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll.



M sei der Umkreismittelpunkt des Dreiecks. Dann haben die Seiten BC, BM, CM des Teildreiecks BCM die Längen a, r, r. Der Punkt A liegt erstens auf dem Kreis um M mit r und zweitens auf einer Parallelen zu BC im Abstand h_a.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck BCM, in dem die Seiten BC, BM, CM die Längen a, r, r haben.

(2) Man schlägt den Kreis um M mit dem Radius r.

(3) Man konstruiert die beiden Parallelen zu BC im Abstand h_a. Schneidet eine von ihnen den in (2) konstruierten Kreis, so sei A einer der Schnittpunkte.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Laut Konstruktion hat die Seite BC des Dreiecks ABC die Länge a. Ferner haben BM, CM und AM die Länge r, also ist r die Länge des Umkreisradius von ΔABC. Schließlich hat A von der Geraden durch B und C den Abstand h_a, wie es verlangt war.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist wegen $2r > a$ bis auf Kongruenz eindeutig.

Konstruktionsschritt (2) ist eindeutig.

(3) liefert zunächst eindeutig die beiden Parallelen zu BC im Abstand h_a. Bei den gegebenen Werten von r, a und h hat - wie man sieht - von diesen Parallelen genau die auf der gleichen Seite der Geraden durch B und C wie M liegende Parallele Schnittpunkte mit dem Kreis um M mit r, und zwar genau zwei.

Diese beiden Punkte liegen symmetrisch zu der Mittelsenkrechten von BC. Daher sind die beiden hiermit erhaltenen Dreiecke zueinander kongruent.

Das Dreieck ABC ist mithin durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 140714:

a) Es sei D der Mittelpunkt der Seite AB eines Dreiecks ABC. Dann sind die Dreiecke ADC und DBC inhaltsgleich, da sie in der Länge der Seiten AD, DB und in der zugehörigen Höhe übereinstimmen.

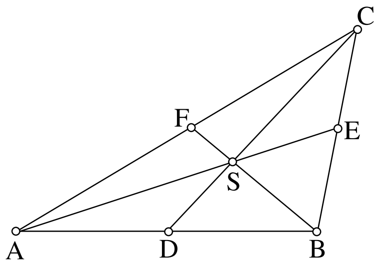
Diese Dreiecke haben die Seite CD gemeinsam; folglich stimmen sie auch in den Längen der (dieser Seite) zugehörigen Höhen überein, d.h., A hat denselben Abstand von der Geraden durch C und D wie B. Also stimmen die Dreiecke CAS, BCS in der Seite CS und in den längen der augehörigen Höhen überein und sind mithin inhaltsgleich.

Analog beweist man, daß die Dreiecke ABS und BCS inhaltsgleich sind.

Daher haben die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt. □

b) Es sei D der Schnittpunkt des Strahles aus C durch S mit AB. Da die inhaltsgleichen Dreiecke CAS und BCS die Seite CS gemeinsam haben, stimmen sie in den Längen der (dieser Seite) zugehörigen Höhen überein, d.h., A hat denselben Abstand von der Geraden durch C und S wie B.

Also stimmen die Dreiecke ADC und DBC in der Seite CD und in den Längen der zugehörigen Höhen überein und sind mithin inhaltsgleich. Da sie dieselbe Höhe auf den Seiten AD bzw. DB haben, sind folglich diese Seiten gleich lang. Somit ist CD die Seitenhalbierende durch C im Dreieck ABC.



Analog beweist man, daß, wenn F der Schnittpunkt des Strahls aus B durch S mit AC ist, BF die Seitenhalbierende durch B im Dreieck ABC ist. Daher ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im Dreieck ABC.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.