14. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1974/1975

Aufgaben und Lösungen

14. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 140721:

Drei Schülerinnen mit den Vornamen Angelika, Beate und Christine und den Zunamen Müller, Naumann und Richter beteiligten sich am alpha-Wettbewerb. Folgendes ist über sie bekannt:

(1) Die Schülerin Naumann nahm zum ersten Mal teil.

(2) Die Schülerin Richter erhielt eine schlechtere Bewertung als mindestens eine der anderen Schülerinnen.

(3) Die Schülerin Müller benutzte nur liniiertes Papier.

(4) Angelika erzielte das schlechteste Ergebnis.

(5) Beate hatte bereits im Vorjahr das alpha-Abzeichen erhalten.

(6) Die erfolgreichste der drei Schülerinnen verwendete nur unliniiertes Papier.

Ermittle den Vor- und Zunamen der erfolgreichsten der drei Schülerinnen!

Aufgabe 140722:

Beweise folgende Aussage:

Wenn ein Dreieck ABC die Eigenschaft hat, daß für den Mittelpunkt D der Seite AB die Gleichung

(1) $\overline{DB} = \overline{BC} = \overline{CD}$

gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig!

Aufgabe 140723:

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $\alpha = 60°$, $\beta = 35°$ und $w_\alpha = 5,5$ cm! Dabei seien α bzw. β die Größen der Winkel $\sphericalangle BAC$ bzw. $\sphericalangle ABC$ und w_α die Länge der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle BAC$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 140724:

Fritz hat von seinem Freund Max für 6 Tage ein Buch geliehen. Zu seinem Freund Paul, der das Buch nach ihm leihen möchte, sagt er am Morgen des 6. Tages:

> "Am ersten Tag las ich den 12. Teil des Buches, an den folgenden 4 Tagen jeweils ein Achtel, und heute muß ich noch, wenn ich das ganze Buch lesen will, 20 Seiten weniger lesen, als ich in den vergangenen Tagen zusammen gelesen habe.
>
> Wieviel Seiten hat das Buch insgesamt?"

Untersuche, welche Möglichkeiten es für Paul gibt, auf diese Frage so zu antworten, daß alle Angaben von Fritz zutreffen!

14. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

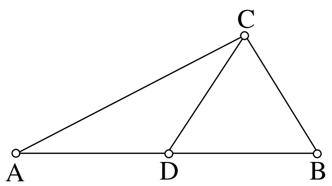
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 140721:

Aus (6), (3) und (2) folgt, daß weder die Schülerin Müller noch die Schülerin Richter am besten abschnitt. Folglich lautet der Zuname der erfolgreichsten Schülerin Naumann. Wegen (4) lautet ihr Vorname nicht Angelika und wegen (1) sowie (5) auch nicht Beate. Folglich heißt sie Christine. Die erfolgreichste der drei Schülerinnen heißt Christine Naumann.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 140722:



Wegen (1) ist das Dreieck DBC gleichseitig. Jeder seiner Innenwinkel ist mithin 60° groß.

Aus (1) folgt ferner, da D der Mittelpunkt von AB ist, $\overline{AD}(=\overline{DB})=\overline{CD}$. Also ist ΔADC gleichschenklig. Als Nebenwinkel des Winkels $\sphericalangle BDC$ hat der Winkel $\sphericalangle ADC$ eine Größe von 120°.

Folglich hat der Winkel $\sphericalangle ACD$ als einer der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ADC eine Größe von 30°. Da die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$ gleich der Summe der Größen der Winkel $\sphericalangle BCD$ und $\sphericalangle ACD$ ist, beträgt diese $60° + 30° = 90°$; das Dreieck ABC ist also rechtwinklig. $\square$

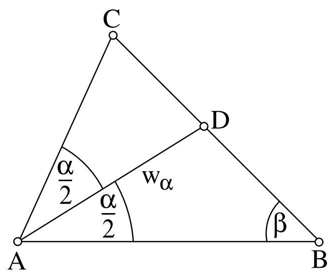
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 140723:

(I) Angenommen, ΔABC sei ein Dreieck, wie es laut Aufgabenstellung konstruiert werden soll.

AD sei die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAC$, wobei D auf BC liegt. Dann sind von dem Teildreieck ABD die Stücke $\overline{AD} = w_\alpha$, $\overline{\sphericalangle BAD} = \frac{\alpha}{2}$ und $\overline{\sphericalangle ABD} = \beta$ bekannt.

Punkt C liegt erstens auf dem freien Schenkel des in A an AB nach derselben Seite der Geraden durch A und B wie D angetragenen Winkels der Größe α und zweitens auf dem Strahl aus B durch D.



Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) (1) Wir konstruieren das Dreieck ABD aus $\overline{AD} = 5,5$ cm, $\overline{\sphericalangle BAD} = 30°$ und $\overline{\sphericalangle ABD} = 35°$.

(2) Wir tragen in A an AB einen Winkel der Größe 60° nach derselben Seite der Geraden durch A und B an, auf der D liegt.

(3) Wir zeichnen den Strahl aus B durch D. Schneidet er den freien Schenkel des in (2) konstruierten Winkels, so sei dieser Schnittpunkt C genannt.

(III) Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion hat der Winkel $\sphericalangle BAC$ die Größe 60°. Ebenso hat nach Konstruktion der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe 35°. Schließlich ist nach Konstruktion AD Halbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ und hat die Länge $5,5$ cm. □

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.

Ebenso sind die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar.

Da sowohl $\sphericalangle BAC$ als auch $\sphericalangle ABD$ spitze Winkel sind, gibt es genau einen Schnittpunkt C. Mithin ist ΔABC durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 140724:

Angenommen, die Angaben treffen zu, wenn das Buch x Seiten hat. Von ihnen las Fritz am ersten Tag $\frac{x}{12}$ Seiten, an den folgenden 4 Tagen zusammen $4 \cdot \frac{x}{8}$ Seiten, das sind zusammen $\frac{7}{12}x$ Seiten. Für den letzten Tag verblieben daher noch $\frac{5}{12}x$ Seiten. Das waren laut Aufgabe 20 Seiten weniger als $\frac{7}{12}x$ Seiten.

Daraus folgt $\frac{2}{12}x = 20$ und somit $x = 6 \cdot 20 = 120$.

Somit können nur für die Antwort, das Buch habe 120 Seiten, die Angaben von Pritz zutreffen. In der Tat treffen sie hierfür zu; denn hat das Buch 120 Seiten, so las Fritz am ersten Tag 10 Seiten, an den folgenden 4 Tagen je 15 Seiten, bis dahin also zusammen 70 Seiten; und liest er noch (20 Seiten weniger, d.h.) 50 Seiten, so ergibt sich genau die Seitenzahl des Buches, 120 Seiten.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.