15. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1975/1976

Aufgaben und Lösungen

15. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 150711:

Zwei Mathematiker unterhalten sich über ihre unterschiedlichen Telefonnummern. Dabei stellte sich folgendes heraus:

(1) Jede der beiden Telefonnummern ist eine dreistellige Primzahl.

(2) Jede einzelne Ziffer in den beiden Telefonnummern stellt, als einstellige Zahl aufgefaßt, ebenfalls eine Primzahl dar.

(3) Die Ziffern, die in den beiden Telefonnummern jeweils an der Zehnerstelle stehen, stimmen miteinander überein. Die Ziffer der Hunderterstelle der einen Telefonnummer ist die Ziffer der Einerstelle der anderen und umgekehrt.

Ermittle die Telefonnummern, und begründe das Ergebnis, ohne dabei eine Primzahlentabelle als Beweismittel zu verwenden!

Aufgabe 150712:

Zwei Gefäße, A bzw. B genannt, haben zusammen ein Fassungsvermögen von genau 8 Litern. Auf beide Gefäße ist eine bestimmte Wassermenge W so verteilt, daß A zur Hälfte und B ganz gefüllt ist. Gießt man nun soviel Wasser aus B in A, daß A ganz gefüllt ist, so ist B noch zu einem Sechstel gefüllt. Gefragt wird

a) nach dem Fassungsvermögen von jedem der Gefäße A und B,

b) nach der Wassermenge W.

Ermittle alle in a) und b) erfragten Angaben, die die genannten Eigenschaften haben!

Aufgabe 150713:

Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2, die einander in genau einem Punkt S schneiden. Um S als Mittelpunkt sei ein Kreis geschlagen, er schneide g_1 in A und B sowie g_2 in C und D.

Beweise, daß die Strecken AC und BD gleich lang und parallel sind, daß also $\overline{AC} = \overline{BD}$ und $AC \parallel BD$ gilt!

Aufgabe 150714:

In der Ebene ϵ seien 50 verschiedene Punkte so gelegen, daß keine Gerade existiert, die drei dieser 50 Punkte enthält. Jeder dieser 50 Punkte soll nun mit jedem anderen durch eine Strecke verbunden werden.

a) Ermittle die Anzahl der Verbindungsstrecken!

b) Angenommen, die 50 Punkte seien die Eckpunkte eines konvexen 50-Ecks. Ermittle die Anzahl der Diagonalen des 50-Ecks!

15. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 150711:
Die einstelligen Primzahlen sind 2, 3, 5, 7.

Wegen (1) können die Nummern weder durch 2 noch durch 5 teilbar sein, folglich enden sie wegen (2) auf 3 oder 7. Da die Nummern verschieden sind und wegen (3) und (1), haben die Nummern die Form $3x7$ bzw. $7x3$, wobei x eine einstellige Primzahl, also eine der Zahlen 2, 3, 5, 7 ist.

Es ist $x \neq 2$; denn $3 \mid 327$.
Es ist $x \neq 5$; denn $3 \mid 357$.
Es ist $x \neq 7$; denn $13 \mid 377$.

Für $x = 3$ erhält man die Zahlen 337 bzw. 737. Da die erste weder durch 2 noch durch 3, 5, 7, 11, 13, 17 teilbar ist und $19^2 = 361 > 337$ ausfällt, ist 337 eine Primzahl. Ebenso ist 733 weder durch 2 noch durch 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 teilbar und wegen $29^2 = 841 > 733$ mithin Primzahl.

Die beiden Mathematiker haben also die Telefonnummern 337 und 733.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 150712:

(I) Wenn die genannten Eigenschaften vorliegen, so folgt:

a) Gefäß A habe ein Fassungsvermögen von x Litern, dann hat B ein solches von $(8 - x)$ Litern. Hierfür gilt

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + 8 - x &= x + \frac{8-x}{6} \\ 8 - \frac{x}{2} &= x + \frac{4}{3} - \frac{x}{6} \\ \frac{20}{3} &= \frac{8}{6}x \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Also kann nur die Angabe, daß Gefäß A ein Fassungsvermögen von 5 Litern und Gefäß B deshalb eines von 3 Litern hat, den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Weiter folgt:

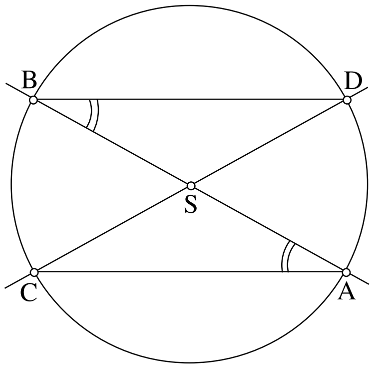
b) Wegen $3,0\,\mathrm{l} + 2,5\,\mathrm{l} = 5,5\,\mathrm{l}$ beträgt die Wassermenge $W = 5,5\,\mathrm{l}$. Also kann nur diese Angabe die Forderungen erfüllen.

(II) Die in a), b) genannten Angaben haben die verlangten Eigenschaften; denn füllt man A zur Hälfte und B ganz, so ergibt dies die Wassermenge $3,0\,\mathrm{l} + 2,5\,\mathrm{l} = 5,5\,\mathrm{l} = W$.

Füllt man aber das 5 l fassende Gefäß A vollständig, so bleiben von der Wassermenge noch 0, 5 l im Gefäß B, also ist dies wegen seines Fassungsvermögens von 3 l genau zu einem Sechstel gefüllt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 150713:



Die Dreiecke ASC und BSD sind kongruent nach sws; denn es gilt:

(1) $\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS}$

(2) $\overline{\sphericalangle ASC} = \overline{\sphericalangle BSD}$ als Scheitelwinkel.

Folglich gilt $\overline{AC} = \overline{BD}$ sowie $\overline{\sphericalangle CAS} = \overline{\sphericalangle DBS}$.

Nach der Umkehrung des Satzes über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen folgt daraus $AC \parallel BD$. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Lösung 150714:

a) Zur Wahl eines ersten Endpunktes einer der Verbindungsstrecken hat man genau 50 Möglichkeiten. In jeder von dieser, hat man dann genau 49 Möglichkeiten, einen der übrigen Endpunkte als zweiten Endpunkt einer der Verbindungsstrecken zu wählen. Durch diese insgesamt $50 \cdot 49 = 2\,450$ Wahlmöglichkeiten erhält man alle gesuchten Verbindungsstrecken, und zwar (da nach Voraussetzung keine dieser Strecken außer den Endpunkten einen anderen gegebenen Punkt enthält) jede Strecke genau doppelt (da jeder der Endpunkte einmal als erster und einmal als zweiter Endpunkt auftritt).

   Daher ist $2\,450 : 2 = 1\,225$ die Anzahl aller gesuchten Verbindungsstrecken.

b) Von diesen 1 225 Verbindungsstrecken bilden genau 50 die Seiten des konvexen 50-Ecks, die übrigen sind die gesuchten Diagonalen. Ihre Anzahl ist also $1\,225 - 50 = 1\,175$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.