15. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1975/1976

Aufgaben und Lösungen

15. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 150911:

Ermitteln Sie alle im dekadischen Zahlensystem geschriebenen vierstelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllen!

(1) Die Zahl wird mit vier Ziffern geschrieben, die, einzeln für sich gelesen, vier unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen bezeichnen. An die Reihenfolge dieser Ziffern werden hier keine Anforderungen gestellt.

(2) Die Zahl ist durch 99 teilbar.

Aufgabe 150912:

In

$$\begin{array}{ccccc} & H & A & U & S \\ & H & A & U & S \\ \hline S & T & A & D & T \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

Geben Sie alle Lösungen dafür an!

Aufgabe 150913:

Gegeben seien zwei verschiedene zueinander parallele Geraden g und h. Außerhalb des von ihnen eingeschlossenen Streifens seien ferner zwei voneinander verschiedene Punkte A und B so gegeben, daß auch kein Punkt der Strecke AB in diesem Streifen liegt und daß der Abstand von A zu g kleiner ist als der Abstand von A zu h. Für jeden Punkt P auf h bezeichne A' bzw. B' den Schnittpunkt von g mit PA bzw. PB.

Konstruieren Sie alle diejenigen Punkte P auf h, für die mit diesen Bezeichnungen $\overline{A'P} = \overline{B'P}$ gilt!

Begründen Sie die Konstruktion; diskutieren Sie, ob alle Punkte P mit der genannten Eigenschaft erhalten werden können und wie viele solcher Punkte es je nach der Lage der gegebenen g, h, A, B geben kann!

Aufgabe 150914:

Als Herr T. am 30.12.1973 seinen Geburtstag beging, sagte er zu seiner Frau: "Jetzt bin ich genau 8 mal so alt wie unser Sohn, wenn ich als Altersangabe jeweils nur die vollen (vollendeten) Lebensjahre rechne."

Darauf entgegnete seine Frau: "Im Jahre 1974 wird der Fall eintreten, daß du 5 mal so alt wie unser Sohn bist, wenn auch ich nur die vollen Lebensjahre berücksichtige."

Untersuchen Sie, ob es genau ein Datum gibt, für das - als Geburtsdatum des Sohnes - alle diese Angaben zutreffen! Ist das der Fall, so geben Sie das genaue Geburtsdatum des Sohnes an (Tag, Monat, Jahr)!

15. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 150911:

I. Wenn eine Zahl die genannten Bedingungen erfüllt, so gilt:

   Wegen (1) wird die Zahl mit den Ziffern 0, 1, 2, 3 oder 1, 2, 3, 4 oder 2, 3, 4, 5 oder 3, 4, 5, 6 oder 4, 5, 6, 7 oder 5, 6, 7, 8, oder 6, 7, 8, 9 (in irgendeiner Reihenfolge geschrieben.

   Wegen (2) muss die Zahl durch 9 teilbar sein, nach der Teilbarkeitsregel für die 9 muss also ihre Quersumme durch 9 teilbar sein.

   Wegen $0+1+2+3=5$; $1+2+3+4=10$; $2+3+4+5=14$; $3+4+5+6=18$; $4+5+6+7=22$; $5+6+7+8=26$; $6+7+8+9=30$ trifft das nur zu, wenn die Zahlen die Ziffern 3, 4, 5, 6 (in irgendeiner Reihenfolge enthält.

   Nun gilt es genau 24 solche Zahlen , nämlich:

   3456, 3465, 3546, 3564, 3645, 3654, 4356, 4365, 4536, 4563, 4635, 4653, 5346, 5364, 5436, 5463, 5634, 5643, 6345, 6354, 6435, 6453, 6534, 6543.

   Von ihnen sind nur die 8 Zahlen

   3465, 3564, 4356, 4653, 5346, 5643, 6435, 6534, durch 11 teilbar.

II. Diese 8 Zahlen erfüllen die Bedingung (1).

   Sie sind ferner durch 9 und 11 und damit da 9 und 11 teilerfremd sind, durch 99 teilbar, erfüllen also auch die Bedingung (2).

Anmerkung:

Unter Benutzung der Teilbarkeitsregel für die 11 lässt sich die Lösung vereinfachen, jedoch ist diese Regel kein Lehrplanstoff.

Sie darf aber von den Schülern ohne Beweis verwendet werden.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 150912:

I. Angenommen, bei einer Ersetzung entstehe eine Lösung.

   Dann gilt für diese Ersetzung $S=1$; denn die fünfstellige natürliche Zahl "STADT" kann nicht mit 0 beginnen, und die Summe zweier vierstelliger Zahlen ist kleiner als 20000.

   Ferner gilt $S+S=T$ also $T=2$. Somit muss $H+H=12$ gelten; denn würde dazu noch ein Übertrag von der Hunderterspalte treten, denn könnte dieser nur 1 sein, was stets auf eine ungerade, also von 12 verschiedene Summe $H + H + 1$ führen würde.

Also gilt $H = 6$. Damit gilt $A \leq 4$, da sonst ein Übertrag in die Tausenderspalte auftreten würde.

Wäre nun mit Übertrag aus der Zehnerspalte $A + A + 1 = A$, so würde $A = -1$ folgen. Also kann kein solcher Übertrag auftreten, und man erhält $A + A = A$, also $A = 0$ sowie $U \leq 4$.

Da verschiedene Buchstaben verschiedenen Ziffern entsprechen und von den Zahlen 0, 1, 2. 3, 4 bereits 0, 1, 2 vergeben sind, kann nur $U = 3$ oder $U = 4$ sein. Für $U = 3$ erhielte man $D = 6$, was wegen $H = 6$ den Regeln der Aufgabe widerspricht. Also gilt $U = 4$ und $D = 8$.

Somit kann nur die Ersetzung $A = 0$, $D = 8$, $H = 6$, $S = 1$, $T = 2$, $U = 4$ zu einer Lösung führen.

II. In der Tat sind bei dieser Ersetzung verschiedene Buchstaben stets durch verschiedene Ziffern ersetzt, und da ferner die entstehende Additionsaufgabe

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 0 & 4 & 1 \\ & 6 & 0 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 8 & 2 \end{array}$$

richtig gelöst ist, erfüllt diese Ersetzung alle gestellten Forderungen.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 150913:

I. Angenommen, ein Punkt P auf h habe die Eigenschaft $A'P = B'P$. Dann folgt:

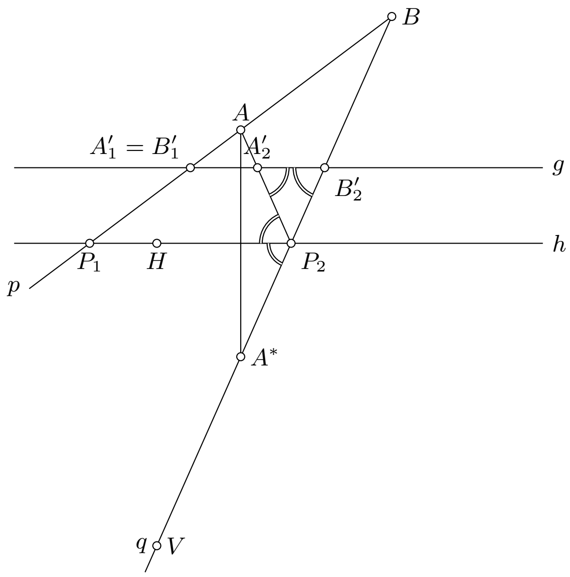
1. Ist $A' = B'$, so geht die durch P und A gelegte Gerade p auch durch $(A' =)B'$, also auch durch B.
2. Ist $A' \neq B'$, so gilt, wenn H einen näher an A als an B' gelegenen Punkt auf h und V einen Punkt der Verlängerung von BP über P hinaus bezeichnet,

   $\sphericalangle APH = \sphericalangle PA'B'$ (Wechselwinkel an Parallelen)

   $= \sphericalangle PB'A'$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)

   $= \sphericalangle VPH$ (Stufenwinkel an Parallelen)

Daher liegt der durch Spiegelung von A an h entstandene Punkt A^* auf der Geraden q durch P und B.



II. Hiernach hat ein Punkt P nur dann die geforderte Eigenschaft, wenn er als einer der Punkte P_1, P_2 durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Man konstruiere die Gerade p durch A und B.
2. Schneiden sich p und h, so sei P_1 ihr Schnittpunkt.
3. Man konstruiere den durch Spiegelung von A an h entstehenden Punkt A^*.
4. Man konstruiere die Gerade q durch A^* und B.
5. Schneiden sich q und h, so sei P_2 ihr Schnittpunkt.

III. Jeder so konstruierte Punkt P hat die geforderte Eigenschaft.

Beweis:

1. Ist $P = P_1$ nach II.1.2 konstruiert, so gilt:

   Die Strecken PA und PB liegen beide auf p. Daher schneiden beide die Gerade q im demselben Punkt, d.h. es gilt $A' = B'$ und somit $A'P = B'P$.

2. Ist $P = P_2$ nach II.3.4.5. konstruiert, so gilt:

   a) Ist $A' = B'$, so gilt $A'P = B'P$.

   b) Ist $A' \neq B'$, so gilt, wenn H einen näher an A' als an B' gelegenen Punkt auf h bezeichnet,

   $\sphericalangle PA'B = \sphericalangle ABH$ (Wechselwinkel an Parallelen)

   $= \sphericalangle A^*PH$ (da A^* Spiegelpunkt von A an h ist)

   $= \sphericalangle PB'A'$ (Stufenwinkel an Parallelen)

   also ist $\Delta PA'B'$ gleichschenklig mit $A'P = B'P$.

V. Konstruktionsschritt II.1. ist eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt II.2. führt genau dann auf keinen Punkt P_1, wenn $p \parallel h$ ist, anderenfalls auf genau einen Punkt P_1.

Konstruktionsschritt II.3. und 4. sind stets eindeutig ausführbar, ebenfalls Konstruktionsschritt II.5., da A^* auf B auf verschiedenen Seiten der Geraden h liegen.

Es gilt genau dann $P = P_2$, wenn der Spiegelpunkt A^* auf der Geraden p durch A, B liegt. Da die Gerade durch A, A^* stets auf h senkrecht steht, gilt somit $P_1 = P_2$ genau im Falle $p \perp h$.

Damit ist gezeigt:

1. Ist die Gerade durch A, B parallel zu h, so existiert genau ein gesuchter Punkt P, und er kann durch die Konstruktion II.3. bis 5. gefunden werden.
2. Ist die Gerade durch A, B senkrecht zu h, so existiert genau ein gesuchter Punkt P, und er kann durch die Konstruktion II.1.2. oder durch die Konstruktion II.3. bis 5. gefunden werden.
3. Ist die Gerade durch A, B weder parallel noch senkrecht zu h, so existieren genau zwei gesuchte Punkte P_1, P_2; sie können durch die Konstruktion II.1.2. bzw. II.3. bis 5. gefunden werden.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 150914:

I. Angenommen, für ein Geburtsdatum des Sohnes seien alle Angaben zutreffend.

Dann gilt:

Ist x das in vollen (vollendeten) Lebensjahren ausgedrückte Alter des Sohnes am 30. 12. 1973, so kann es im Jahre 1974 nur die Werte $x, x+1$, $x+2$ annehmen, und davon den letzten nur dann, wenn der Sohn am 31. 12. Geburtstag hat.

Ferner ist $8x$ das in vollen Lebensjahren ausgedrückte Alter des Vaters am 30. 12. 1973, und dies kann im Jahre 1974 nur die Werte $8x, 8x+1$ annehmen.

Daher gilt für eine der Zahlen $a = 0, 1, 2$ und eine der Zahlen $b = 0, 1$ die Gleichung $5 \cdot (x+a) = 8x+b$, also $5a - b = 3x$.

Nun zeigt die folgende Tabelle der Werte $5a - b$,

b	$a = 0$	1	2
0	0	5	10
1	-1	4	9

dass $5a-b$ nur für $a = 2, b = 1$ durch 3 teilbar ist, was dann auf $x = 3$ führt. Also können die Angaben in der Aufgabe nur dann zutreffen, wenn der Sohn am 31. 12. Geburtstag hat, am 30. 12. 73 noch 3 Jahre alt war, am 31. 12. 1973 also 4 Jahre alt wurde und folglich am 31. 12. 1969 geboren war.

II. Dieses Geburtsdatum des Sohnes, zusammen mit dem daraus folgenden Alter des Vaters von 24 Jahren am 30. 12. 1973, erfüllt in der Tat alle Angaben; denn bei diesen Daten war am 30. 12. 1973 der Vater 8 mal so alt wie sein Sohn; am 31. 12. 1974 aber, als der Sohn 5 Jahre alt wurde, war der Vater 25 Jahre alt, also 5 mal so alt wie sein Sohn.

Daher treffen die Angaben genau für den 31. 12. 1969 als Geburtsdatum des Sohnes zu.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission