# 15. Mathematik Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 12
# Saison 1975/1976

Aufgaben und Lösungen

# 15. Mathematik-Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 12
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 151231:

Jemand löste eine Divisionsaufgabe $A$; bei dieser war eine natürliche Zahl, die (in dekadischer Darstellung) mit fünf gleichen Ziffern geschrieben wird, durch eine vierstellige natürliche Zahl, die (in dekadischer Darstellung) mit vier gleichen Ziffern geschrieben wird, zu dividieren.

Bei dieser Division ergab sich die Zahl 16 und ein gewisser Rest. Anschließend bildete jemand aus dieser Aufgabe $A$ eine neue Divisionsaufgabe $A'$, indem er sowohl im Dividenden als auch im Divisor je eine Ziffer wegfallen ließ. Bei der Division der so erhaltenen Zahlen ergab sich wieder die Zahl 16 sowie ein um 2 000 kleinerer Rest als bei der Aufgabe $A$.

Man nenne (durch Angabe von Dividend und Divisor) alle Divisionsaufgaben $A$, die diese Eigenschaft aufweisen.

Aufgabe 151232:

Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge von reellen Zahlen, so soll eine reelle Zahl $e \neq 0$ aus dieser Menge als eine "Einheit von $\mathfrak{M}$" bezeichnet werden, wenn für *jedes* Element $x$ aus $\mathfrak{M}$ die Beziehung $\frac{x}{e} \in \mathfrak{M}$ gilt.

(So besitzt z.B. die Menge aller ganzen Zahlen nur die Einheiten +1 und -1, während z.B. in der Menge aller rationalen Zahlen jedes von 0 verschiedene Element eine Einheit ist.)

Es sei nun $\mathfrak{M}$ die Menge aller Zahlen $a + b\sqrt{2}$, wobei $a$ und $b$ beliebige ganze Zahlen sind. In dieser Menge sind z.B. +1 und -1 Einheiten.

a) Man gebe noch 5 weitere Einheiten von $\mathfrak{M}$ an.

b) Man beweise, daß $\mathfrak{M}$ unendlich viele verschiedene Einheiten enthält.

Aufgabe 151233:

Es seien $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$ drei voneinander verschiedene parallele Sehnen eines Kreises $k$. Ferner seien $X$ bzw. $Y$ bzw. $Z$ die zu $A_2$ bzw. $B_2$ bzw. $C_2$ bezüglch der Mittelpunkte der Sehnen $B_1C_1$ bzw. $C_1A_1$ bzw. $A_1B_1$ symmetrisch liegende Punkte.

Man beweise, daß $X$, $Y$ und $Z$ auf ein und derselben Geraden liegen.

Aufgabe 151234:

*Definition:* Eine gebrochene rationale Funktion $f$ heißt echt gebrochen, wenn sie sich in ihrem Definitionsbereich in der Form

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{mit}$$
$$u(x) = a_m x^m + ... + a_1 x + a_0; \quad a_m \neq 0$$
$$v(x) = b_n x^n + ... + b_1 x + b_0; \quad b_n \neq 0 \quad \text{und} \quad m < n$$

darstellen läßt.

Es ist zu untersuchen, ob die Summe zweier echt gebrochener rationaler Funktionen wieder eine echt gebrochene rationale Funktion ist, wenn die Summe von der Funktion 0

$$\left[= \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{mit} \quad u(x) = a_m x^m + ... + a_0, \quad \text{alle} \quad a_m = ... = a_0 = 0\right]$$

verschieden ist.

Aufgabe 151235:
In der Ebene mögen $n$ Punkte ($n \geq 4$) so gelegen sein, daß je vier von ihnen Eckpunkte eines nichtentarteten konvexen Vierecks sind.

Man beweise, daß dann alle $n$ Punkte Eckpunkte eines konvexen $n$-Ecks sind.

Aufgabe 151236A:
Gegeben seien $n$ Punkte einer Ebene ($n > 0$), von denen keine drei auf derselben Geraden liegen. Die $n$ Punkte sollen durch Strecken so miteinander verbunden werden, daß es keine drei Punkte gibt, von denen jeder mit jedem der anderen beiden verbunden ist.

Man zeige, daß sich unter diesen Bedingungen für die Anzahl $Z_v$ der Verbindungsstrecken

$$Z_v \leq \left[\frac{n^2}{4}\right] \quad \text{gilt.}$$

Man zeige ferner, daß sich unter Beachtung der Bedingungen $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ Verbindungsstrecken finden lassen.

*Anmerkung:* Mit $[x]$ sei die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als $x$ ist.

Aufgabe 151236B:
Es seien $P(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $p$, $q$, $r$, $s$ reelle Zahlen, für die $p \neq q$ gelte. Bei der Division dieses Polynoms durch $(x - p)$ ergebe sich als Rest die Zahl $r$, bei der Division des gleichen Polynoms durch $(x - q)$ als Rest die Zahl $s$.

Welcher Rest ergibt sich unter diesen Voraussetzungen bei der Division des Polynoms $P(x)$ durch

$$(x - p)(x - q)?$$

# 15. Mathematik-Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 12
# Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 151331:
Eine fünfstellige natürliche Zahl $Z$ mit identischen Ziffern kann folgendermaßen dargestellt werden

$$Z = x + 10x + 100x + 1000x + 10000x \;=\; 11111x, \tag{1}$$

wobei $x$ eine einstellige natürliche Zahl ist $(0 < x < 10)$. Da analoge Beziehungen auch für drei- und vierstellige natürliche Zahlen mit identischen Ziffern gelten,kann man die Divisionsaufgabe A folgendermaßen schreiben

$$11111x = 16 * 1111y + R, \tag{2}$$

wobei

$$0 < x < 10, \qquad 0 < y < 10, \qquad 0 < R < 1111y \tag{3}$$

gilt und sowohl $x$ als auch $y$ eine einstellige natürliche Zahl ist. Der Rest $R$ ist eine natürliche Zahl. Eine zu (2) äquivalente Beziehung kann man auch für die Divisionsaufgabe A' aufstellen

$$1111x = 16 * 111y + (R - 2000) \tag{4}$$

wobei zusätzlich zu (3) auch

$$0 < (R - 2000) < 111y \tag{5}$$

erfüllt sein muß. Stellt man nun sowohl (2) als auch (4) nach $R$ um und setzt die so gewonnen Beziehungen gleich, so erhält man

$$(11111 - 1111)x = 16 * (1111 - 111)y + 2000. \tag{6}$$

Diese Gleichung läßt sich unschwierig nach $x$ auflösen

$$x = \frac{8}{5}y + \frac{1}{5}. \tag{7}$$

Setzt man nun die 9 verschiedenen Werte für $y$ ein [vergleiche (3)], so stellt man fest, daß sich nur für $y = 3$ und für $y = 8$ eine natürliche Zahl für $x$ ergibt. Da das Ergebnis für x bei $y = 8$ nicht einstellig ist, gibt es nur ein mögliche Kombination: $x = 5$, $y = 3$. Einsetzen in (2) ergibt unmittelbar

$$55555 = 16 * 3333 + R, \qquad => \quad R \;=\; 2227, \tag{8}$$

womit gezeigt wäre, daß alle Forderungen aus (3) und (5) erfüllt sind.

Damit ist gezeigt, daß es nur eine Divisionsaufgabe A gibt; der Dividend ist dabei durch 55555, der Divisor durch 3333 gegeben.

*Aufgeschrieben und gelöst von Arnd Hübsch*

Lösung 151332:

a) $e_1 = 1 + \sqrt{2}$, $e_2 = 1 - \sqrt{2}$, $e_3 = -1 + \sqrt{2}$, $e_4 = -1 - \sqrt{2}$, $e_5 = 3 + 2\sqrt{2}$

b) Die Einheit $e$ als Element der Menge $\mathfrak{M}$ läßt sich schreiben als $e = x + y\sqrt{2}$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$. Es gelten folgende Umformungen:

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{e} = \frac{a+b\sqrt{2}}{x+y\sqrt{2}} = \frac{(a+b\sqrt{2})\cdot(x-y\sqrt{2})}{(x+y\sqrt{2})\cdot(x-y\sqrt{2})} = \frac{ax-2by+(bx-ay)\sqrt{2}}{x^2-2y^2}$$

Der Zähler ist ein Element aus $\mathfrak{M}$, da $a$, $b$, $x$, $y$ ganzzahlig sind. Wenn nun der Nenner 1 oder -1 wäre, hätte man eine Einheit. Es bleibt also nachzuweisen, daß es unendlich viele solche Nenner gibt. Dazu wird ein Beweis nach dem Prinzip der vollständigen Induktion geführt, wobei jedes $x$ und $y$ aus vorherigen Werten von $x$ und $y$ entsteht:

*Anf.:* $n = 0$, $x = 1$, $y = 0 \Rightarrow x^2 - 2y^2 = 1 = (-1)^0 = (-1)^n$

*Vor.:* $x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^n$ (1)

$x_{n+1} = y_{n+1} + y_n$ (2)

$y_{n+1} = y_n + x_n$ (3)

*Beh.:* $x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$

*Bew.:*

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2 &= (y_{n+1}+y_n)^2 - 2y_{n+1}^2 \\ &= (y_n + x_n + y_n)^2 - 2\cdot(y_n+x_n)^2 \\ &= 4y_n^2 + x_n^2 + 4x_ny_n - 2y_n^2 - 2x_n^2 - 4x_ny_n \\ &= 2y_n^2 - x_n^2 \\ &= -(x_n^2 - 2y_n^2) \\ &= -1\cdot(-1)^n \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

q.e.d.

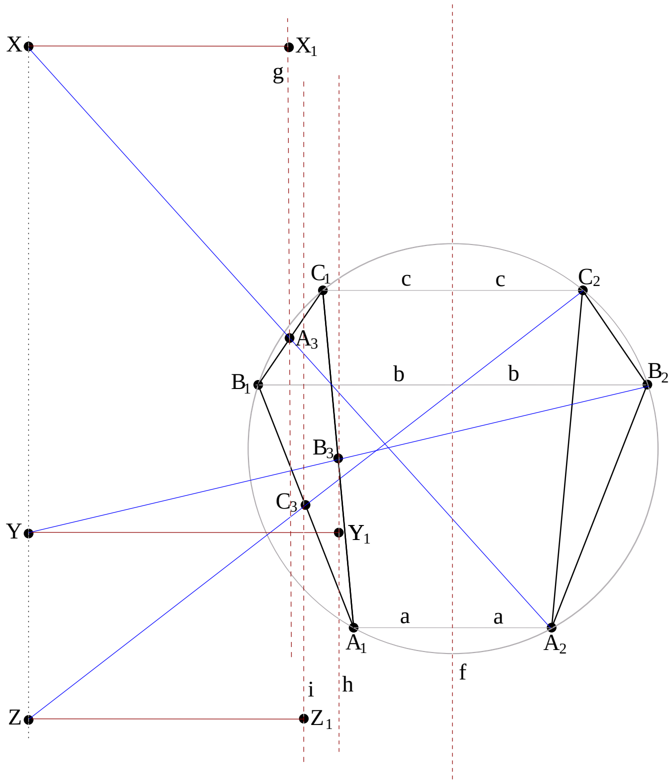
Mit den Startwerten $x_0 = 1$ bzw. $x_0 = -1$ und $y_0 = 0$ und den Vorschriften $x_{n+1} = y_{n+1} + y_n$ bzw. $y_{n+1} = y_n + x_n$ kommt man zu den gesuchten Einheiten, von denen es nun nachgewiesenermaßen unendlich viele gibt.

*Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel*

Lösung 151333:

Vor.: $A_3$ halbiert $\overline{B_1C_1}$ und $\overline{A_2X}$
$B_3$ halbiert $\overline{A_1C_1}$ und $\overline{B_2Y}$
$C_3$ halbiert $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{C_2Z}$

Beh.: X, Y und Z liegen auf derselben Gerade




Bew.: Es werden folgende zu den parallelen Sehnen senkrechte Geraden eingeführt:
$f$ durch den Kreismittelpunkt, $g$ durch $A_3$, $h$ durch $B_3$, $i$ durch $C_3$.

Allgemein werde der Abstand eines Punktes $P$ von einer Geraden $g$ durch $d(gP)$ bezeichnet.

$a$, $b$ bzw. $c$ sind wie folgt definiert: $a := d(fA_2)$, $b := d(fB_2)$, $c := d(fC_2)$. Da der Durchmesser (hier durch $f$ repräsentiert) eines Kreises senkrecht stehende Sehnen halbiert, gilt ebenfalls $d(fA_1) = a$, $d(fB_1) = b$, $d(fC_1) = c$. Mit der Voraussetzung läßt sich nun der Abstand von $A_3$, $B_3$ und $C_3$ zu $f$ ausdrücken:

$$d(fA_3) = \tfrac{d(fB_1)+d(fC_1)}{2} = \tfrac{b+c}{2} \text{ und analog } d(fB_3) = \tfrac{a+c}{2} \text{ bzw. } d(fC_3) = \tfrac{a+b}{2}$$

Schließlich ergeben sich nun für die Abstände der Punkte $X$, $Y$, $Z$ zu $f$ folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
d(fX) &= d(gX) + d(fA_3) = d(gA_2) + d(fA_3) = a + d(fA_3) + d(fA_3)\\
&= a + 2 \cdot \frac{b+c}{2} = a + b + c\\
d(fY) &= d(hY) + d(hB_3) = d(hB_2) + d(fB_3) = b + d(fB_3) + d(fB_3)\\
&= b + 2 \cdot \frac{a+c}{2} = a + b + c\\
d(fZ) &= d(iZ) + d(iC_3) = d(iC_2) + d(fC_3) = c + d(fC_3) + d(fC_3)\\
&= c + 2 \cdot \frac{a+b}{2} = a + b + c
\end{aligned}$$

Damit liegen die drei Punkte $X$, $Y$ und $Z$ auf derselben Seite einer Geraden ($f$) und haben denselben Abstand zu ihr. Daraus folgt, daß diese drei Punkte auf einer Geraden liegen (die parallel zu $f$ verläuft).

q.e.d.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Felix Kaschura*

Lösung 151334:

*Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)*

Lösung 151335:

*Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)*

Lösung 151336A:

*Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)*

Lösung 151336B:

*Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)*

# Quellenverzeichnis

**(0)** Unbekannt