17. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1977/1978

Aufgaben und Lösungen

17. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 171231:

Gegeben sei die Folge (a_n) durch

$$a_n = \frac{4n}{4n^2 + 121} \qquad (1)$$

für $n = 1, 2, 3, ...$

Man ermittle die obere Grenze und die untere Grenze von (a_n), sofern diese existieren.

Aufgabe 171232:

Zu jeder ganzen Zahl a ermittle man alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$x^4 + x^3 + a^2x^2 + x + 1 = 0.$$

Aufgabe 171233:

Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge s, in dem fünf kongruente Kugeln (mit den Mittelpunkten P, Q, R, S, T) so angeordnet sind, daß gilt:

(1) Die Kugel um P berührt die drei von A ausgehenden Seitenflächen ABC, ACD, ADB des Tetraeders,

(2) die Kugel um Q berührt die drei von B ausgehenden Seitenflächen,

(3) die Kugel um R berührt die drei von C ausgehenden Seitenflächen und

(4) die Kugel um S die drei von D ausgehenden Seitenflächen.

(5) Die Kugel um T berührt die vier übrigen Kugeln von außen.

Man ermittle den Radius r dieser fünf Kugeln.

Aufgabe 171234:

Man beweise, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc} \quad \text{gilt.}$$

Aufgabe 171235:

Man beweise folgenden Satz:

Sind u der Umfang, r der Radius des Inkreises und R der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC, dann gilt $R > \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{ur}$. Ist das Dreieck insbesondere rechtwinklig, dann gilt sogar $R \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{ur}$.

Aufgabe 171236A:

Es sei n eine natürliche Zahl mit $n > 1$.

a) Man ermittle alle diejenigen in der Menge R der reellen Zahlen definierten Funktionen f, die in R stetig sind und die Eigenschaft haben, daß für jede reelle Zahl x die Gleichung

$$f(x^n) = f(x) \tag{1}$$

gilt.

b) Man gebe eine in R definierte und unstetige Funktion f an, die die Eigenschaft (1) hat.

Aufgabe 171236B:

Ist z eine reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich z ist. Beispielsweise gilt $\left[\frac{7}{2}\right] = 3; \quad [5] = 5; \quad [-\pi] = -4.$

Man beweise: Für jede reelle Zahl x und jede positive ganze Zahl n gilt

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + ... + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

17. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 171331:

1. Untere Grenze:

   $\frac{4n}{4n^2+121}$ ist, da n eine natürliche Zahl ist, immer positiv. Läßt man n gegen unendlich laufen, gilt:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{4n^2+121} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n}}{4+\frac{121}{n^2}} = \frac{0}{4+0} = 0$$

   $\langle a_n \rangle$ ist also eine Nullfolge. Da alle ihre Folgenglieder positiv sind, ist 0 die untere Grenze (die aber niemals in der Folge vorkommt).

2. Obere Grenze:

   Man subtrahiere a_{n+1} von a_n:

   $$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{4n}{4n^2+121} - \frac{4(n+1)}{4(n+1)^2+121} \\ &= \frac{4n\cdot(4n^2+8n+125) - (4n+4)\cdot(4n^2+121)}{(4n^2+121)\cdot(4(n+1)^2+121)} \\ &= \frac{16n^2+16n-484}{(4n^2+121)\cdot((2n+2)^2+121)} \end{aligned}$$

   Der Nenner ist, weil n eine natürliche Zahl ist, immer positiv.
   Der Zähler wird mit größer werdendem n auch immer größer. Die einzige zutreffende Nullstelle des Zählers liegt zwischen $n = 5$ und $n = 6$
   $n = 5$: $16n^2 + 16n - 484 = -4 < 0$
   $n = 6$: $16n^2 + 16n - 484 = 188 > 0$
   Für alle $n \leq 5$ ist also $16n^2+16n-484$ und damit $a_n - a_{n+1} < 0 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$ für $n < 6$. $\langle a_n \rangle$ steigt also bis zu a_6 streng monoton. Für alle $n > 5$ ist $16n^2 + 16n - 484$ und damit $a_n - a_{n+1} > 0 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$. $\langle a_n \rangle$ fällt also bis a_6 streng monoton.
   Folglich nimmt die Folge bei a_6 ihren größten Wert an. $a_6 = \frac{24}{265}$ ist die obere Grenze der Folge.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel, gelöst von Annika Heckel

Lösung 171332:
Die Gleichung kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + a^2x^2 + x + 1 &= x^3\cdot(x+1) + a^2x^2 + (x+1) \\ &= (x^3+1)\cdot(x+1) + a^2x^2 \end{aligned}$$

$(x+1)$ ist genau dann negativ, wenn x kleiner als -1 ist $(x+1<0 \Leftrightarrow x<-1)$
(x^3+1) ist ebenfalls genau dann negativ, wenn x kleiner als -1 ist $(x^3+1<0 \Leftrightarrow x^3<-1 \Leftrightarrow x<-1)$.

Folglich sind $(x+1)$ und (x^3+1) stets beide negativ oder beide größer oder gleich 0. Also ist ihr Produkt $(x+1)\cdot(x^3+1)$ stets größer gleich 0.

a^2x^2 ist als Quadratzahl stets größer oder gleich 0.

Es gilt also $(x^3+1)\cdot(x+1)+a^2x^2 \geq 0$, wobei der Gleichheitsfall nur eintritt, wenn sowohl $(x^3+1)\cdot(x+1)$ als auch a^2x^2 gleich 0 ist.

Also muß gelten:

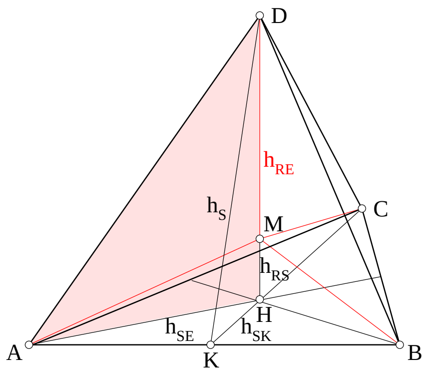
(1) $(x^3+1)\cdot(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1$ sowie

(2) $a^2x^2=0 \Leftrightarrow a=0$ oder $x=0$ aus $x=-1$ (s.o.) folgt also $a=0$

Folglich gibt es nur für $a=0$ eine Lösung, nämlich x=-1.

Aufgeschrieben und gelöst von Annika Heckel

Lösung 171333:



Als *Mittelpunkt (z.B. H)* einer Seite bezeichne ich den Punkt, in dem sich Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, Mittelsenkrechte bzw. Höhen (was bei einem gleichseitigen Dreieck alles das Gleiche ist) schneiden.

Als *Raumhöhe* bezeichne ich die Strecke vom Mittelpunkt einer Seite zur gegenüberliegenden Tetraeder-Ecke. Diese Strecke tritt senkrecht aus der Seite mit dem Mittelpunkt.

Als *Raummittelpunkt M* bezeichne ich den Punkt, in dem sich die 4 Raumhöhen schneiden.

Die Punkte auf den Raumhöhen haben denselben Abstand von 3 Seiten, der Raummittelpunkt sogar von 4 Seiten. Die Mittelpunkte von 4 der Kugeln liegen auf jeweils einer Raumhöhe und haben denselben Abstand von der dazugehörigen Ecke/Seite. Der Mittelpunkt der fünften Kugel ist der Raummittelpunkt.

Zunächst berechne ich die Seitenmittelpunkte. Dabei berechne ich eher Abstände als Punkte. Für die Seitenhöhe h_S gilt $h_S^2+(\frac{s}{2})^2=s^2 \Rightarrow h_S=\frac{\sqrt{3}}{2}s$. Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Mittelpunkt im Verhältnis 2 zu 1. Damit folgt für den Abstand einer Ecke zum Seitenmittelpunkt (z.B. $\overline{AH}$) $h_{SE}=\frac{2}{3}h_S=\frac{\sqrt{3}}{3}s$ und von der Kante (z.B. $\overline{KH}$) $h_{SK}=\frac{1}{3}h_S=\frac{\sqrt{3}}{6}s$.

Für die Raumhöhe h_R gilt nun: $h_R^2+h_{SK}^2=h_S^2 \Rightarrow h_R=\frac{2\sqrt{2}}{3}h_S=\frac{\sqrt{6}}{3}s$

Um die Abstände des Raummittelpunktes M von den Ecken h_{RE} (rote Linien) bzw. Seiten h_{RS} zu berechnen, betrachte ich das rechtwinklige Dreieck (z.B. ΔMHA) vom Raummittelpunkt M zu einem Seitenmittelpunkt (z.B. H) zu einer Ecke (z.B. A) dieser Seite und zurück. Es gilt $h_{RE}^2=h_{RS}^2+h_{SE}^2$ und $h_{RE}+h_{RS}=h_R$. Es ergibt sich $h_{RS}=\frac{\sqrt{6}}{12}s$. Der Umkugelradius h_{RE} ist gleich $\frac{\sqrt{6}}{4}s$.

Nun versucht man eine Kugel in eine Ecke zu platzieren, d.h. bei einem gegeben Radius r die Kugel auf einer Raumhöhe so weit zur Ecke hin zu schieben, bis die Kugel alle 3 Seiten berührt. Die Berührpunke liegen dabei auf den Seitenhöhen. Ist die Bedingung (Berührung) für eine Seite erfüllt, gilt sie auch für die anderen zwei.

Für den Winkel α, den die Raumhöhe mit einer der drei möglichen Seitenhöhen einschließt, gilt $\sin\alpha=\frac{h_{SK}}{h_S}=\frac{1}{3}$. Für den Abstand z, den der Mittelpunkt der Kugel (in 2D übertragen ein Kreis) von der Ecke haben muss, gilt $\sin\alpha = \frac{r}{z}$ (Radius und Seitenhöhe stehen senkrecht aufeinander), also $z = 3r$.

Damit alle 4 Kugeln die fünfte Kugel in der Mitte berühren, muss die Summe aus Abstand z der ersten Kugel von einer Ecke plus deren Radius plus nochmals diesem Radius (für die Kugel im Raummittelpunkt) gleich der vollen Strecke von der Ecke bis zum Mittelpunkt sein: $5r = h_{RE} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{20}s$

Wegen $r < h_{RS}$ befindet sich auch die fünfte Kugel im Inneren des Tetraeders, womit alle Bedingungen erfüllt sind.

Aufgeschrieben und gelöst von Daniel Gutekunst

Lösung 171334:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 171335:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 171336A:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 171336B:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Quellenverzeichnis

(0) Unbekannt