18. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1978/1979

Aufgaben und Lösungen

18. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 180731:

In einem Spezialistenlager für Junge Mathematiker führt Dirk eine Knobelaufgabe vor. Er stellt auf einen Tisch in eine Reihe - für die Zuschauer von links nach rechts - fünf Gefäße auf: eine Flasche, einen Krug, eine Tasse, einen Becher und eine Kanne. Sie sind, nicht notwendig in dieser Reihenfolge, mit je einem der Getränke Tee, Kaffee, Milch, Limonade und Most gefüllt. Den Zuschauern ist nicht bekannt, welches Gefäß welche Flüssigkeit enthält.

Dirk sagt: "Stelle ich die Kanne - wobei ich die anderen Gefäße unverändert stehen lasse - so zwischen zwei der anderen Gefäße, daß unmittelbar links neben ihr das Gefäß mit Tee und unmittelbar rechts neben ihr das Gefäß mit Milch steht, so stehen Milchgefäß und Limonadengefäß unmittelbar nebeneinander, und außerdem steht dann das Gefäß mit Kaffee als mittleres in der Reihe der fünf Gefäße. Findet nun heraus, womit die einzelnen Gefäße gefüllt sind!"

Untersuche, ob allein aus diesen Angaben ermittelt werden kann, welche Getränke sich in jedem der fünf Gefäße befinden. Gib alle mit Dirks Angaben übereinstimmenden Möglichkeiten einer Verteilung der Getränke auf die Gefäße an!

Aufgabe 180732:

Definition: Berührt ein Kreis k eine Seite s eines Dreiecks D und Verlängerungen der beiden anderen Seiten von D, so heißt k "Ankreis des Dreiecks D (an die Seite s)".

Aufgabe: Beweise folgenden Satz:

"Ist k Ankreis eines Dreiecks ABC an die Seite BC und ist M_a der Mittelpunkt von k, so hängt die Größe des Winkels $\sphericalangle BM_aC$ nur von der Größe α des Winkels $\sphericalangle CAB$ ab."

Zum Beweis ermittle eine Formel für die Größe des Winkels $\sphericalangle BM_aC$ in Abhängigkeit von α!

Aufgabe 180733:

Gegeben seien ein Winkel, dessen Größe kleiner als 180° ist, und ein Punkt P im Innern dieses Winkels. Der Scheitel des Winkels sei A.

Konstruiere eine Gerade g, die durch den Punkt P geht und die die Schenkel des Winkels so in Punkten $B \neq A$ bzw. $D \neq A$ schneidet, daß P der Mittelpunkt von BD ist!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob es genau eine Gerade gibt, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

Aufgabe 180734:

In einem Behälter befinden sich genau 25 kg einer 4%igen wäßrigen Lösung, d.h., 4% dieser Lösung bestehen aus der gelösten Substanz, der Rest besteht aus Wasser.

Wieviel Prozent des Wassers sind dieser Lösung zu entziehen, damit eine neue Lösung entsteht, deren Wasseranteil nur noch 90% beträgt?

Aufgabe 180735:

In einem Dreieck ABC sei u die Länge des Umfangs, und r sei die Länge des Umkreisradius.

Beweise, daß dann die Ungleichung $r > \frac{u}{6}$ gilt!

Aufgabe 180736:

Ermittle alle rationalen Zahlen a mit folgender Eigenschaft:

Das Produkt aus der Zahl a und ihrem absoluten Betrag ist gleich der Summe der Zahl a und ihrem absoluten Betrag.

18. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 180731:

Angenommen, es gibt eine Dirks Angaben entsprechende Verteilung der Getränke auf die Gefäße. Dann gibt es - da die Kanne nach dem Umstellen zwischen zwei anderen Gefäßen steht, wobei das Teegefäß jeweils unmittelbar links, das Milchgefäß unmittelbar rechts neben der Kanne steht, - genau die nachfolgend angegebenen drei Möglichkeiten für die Reihenfolge der Gefäße:

(1)	Flasche Tee	Kanne	Krug Milch	Tasse	Becher
(2)	Flasche	Krug Tee	Kanne	Tasse Milch	Becher
(3)	Flasche	Krug	Tasse Tee	Kanne	Becher Milch

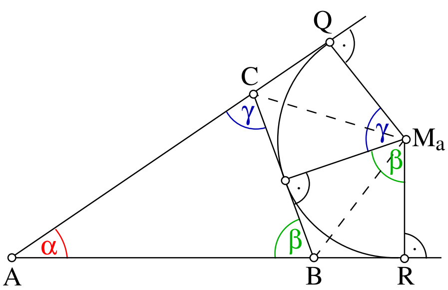
Die Möglichkeiten (1) und (3) scheiden aus, da sie der Angabe widersprechen, daß sich in dem in der Mitte stehenden Gefäß Kaffee befindet.

Somit verbleibt nur die Möglichkeit (2), und dabei ist nach der eben genannten Angabe die Kanne mit Kaffee gefüllt. Hiernach und da außerdem das Limonadengefäß unmittelbar neben dem Milchgefäß steht, verbleibt als einzig mögliche mit Dirks Angaben übereinstimmende Verteilung die folgende:

Die Flasche enthält Most, der Krug Tee, die Kanne Kaffee, die Tasse Milch und der Becher Limonade. Für diese Verteilung treffen alle von Dirk gemachten Angaben zu. Sie ist daher die einzige Verteilung der gesuchten Art.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 180732:



Es seien β, γ die Größen von $\sphericalangle ABC$ bzw. $\sphericalangle BCA$. Die Berührungspunkte von k mit den Verlängerungen von AC bzw. AB seien Q bzw. R.

Dann gilt für die Nebenwinkel von $\sphericalangle ABC$ bzw. $\sphericalangle ACB$: $\overline{\sphericalangle CBR} = 180° - \beta$ und $\overline{\sphericalangle BCQ} = 180° - \gamma$. Da M_a als Mittelpunkt eines Kreises, der beide Schenkel des Winkels $\sphericalangle CBR$ berührt, auf der Halbierenden dieses Winkels liegt, gilt: $\overline{\sphericalangle CBM_a} = 90° - \frac{\beta}{2}$. Entsprechend gilt $\overline{\sphericalangle BCM_a} = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Daraus folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel, angewandt auf das Dreieck BM_aC:

$$\overline{\sphericalangle BM_aC} = 180° - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Nach dem gleichen Satz, angewandt auf das Dreieck ABC, gilt:

$$\beta + \gamma = 180° - \alpha, \text{ also } \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}, \text{ woraus dann } \overline{\sphericalangle BM_aC} = 90° - \frac{\alpha}{2} \text{ folgt.}$$

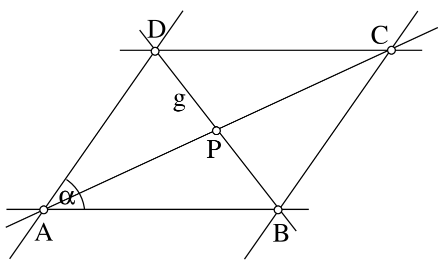
Hinweis zur Korrektur: Statt der hier verwendeten Formulierung über den Mittelpunkt eines Kreises, der beide Schenkel eines Winkels berührt, kann z.B. auch die Formulierung verwendet werden, daß der Mittelpunkt des (eindeutig bestimmten) Ankreises von ΔABC an BC auf den Halbierenden der Außenwinkel bei B und C liegt. Beide Sätze gehören zwar nicht zum obligatorischen Schulstoff, werden aber häufig z.B. in Arbeitsgemeinschaften behandelt. Sie können vom Schüler entweder ohne Beweis zitiert oder (z.B. mit Hilfe von Kongruenzsätzen) bewiesen werden.

Hinweis auf einen weiteren Lösungsweg: Es läßt sich zeigen, daß die Vierecke $PBRM_a$, $QCPM_a$ und ABM_aQ Drachenvierecke sind, deren Winkel an der Spitze von der entsprechenden Diagonalen jeweils halbiert wird. Hieraus folgen die Gleichungen wie oben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 180733:

I. Angenommen, es gibt eine Gerade g, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann schneidet sie die Schenkel des gegebenen Winkels in Punkten, die mit B bzw. D bezeichnet sind, und es ist ferner P Mittelpunkt von BD. Der Scheitelpunkt des Winkels sei A. Dann gibt es genau einen Punkt C auf dem Strahl von A durch P, so daß P Mittelpunkt der Strecke AC ist. Daher halbieren sich die Strecken BD und AC, d.h., das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.



Folglich kann eine Gerade g nur dann alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man zeichnet vom Scheitelpunkt A des gegebenen Winkels einen Strahl durch P, auf dem man von A aus eine Strecke der Länge $2\overline{AP}$ abträgt. Ihr anderer Endpunkt sei C genannt.

(2) Durch C zieht man die Parallelen zu den Schenkeln des gegebenen Winkels. Ihre Schnittpunkte mit den jeweils anderen Schenkeln seien B bzw. D.

(3) Man zeichnet die Gerade g durch B und D.

III. Jede so konstruierte Gerade g erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion gilt $AD \parallel BC$ und $AB \parallel CD$ sowie $\overline{AP} = \overline{PC}$. Folglich ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm und P der Mittelpunkt seiner Diagonalen AC. Daher geht auch die andere Diagonale BD durch P und wird von P halbiert.

IV. Da die Konstruktionsschritte (1) bis (3) stets eindeutig ausführbar sind, gibt es genau eine Gerade der geforderten Art.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 180734:

In der Ausgangslösung befinden sich genau 4% der gelösten Substanz, das ist bei 25 kg Lösung genau 1 kg.

Diese Menge stellt nach dem Entzug einer Wassermenge genau dann 10% der neuen Lösung dar, wenn die neue Lösung insgesamt 10 kg umfaßt.

Somit beträgt genau dann, wenn man der Ausgangslösung 15 kg Wasser entzogen hat, sein Anteil 90%, wie es gefordert war. Zu ermitteln ist demnach, wieviel Prozent von 24 kg Wasser 15 kg Wasser sind. Für diesen gesuchten Prozentsatz x gilt die Beziehung

$$x : 100\% = 15 : 24 \text{ und damit } x = \frac{1500}{24}\% = 62,5\%.$$

Demzufolge sind 62,5% des in der Ausgangslösung enthaltenen Wassers dieser Lösung zu entziehen, um eine neue Lösung mit 90% Wasseranteil zu erhalten.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 180735:

Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC. Wir unterscheiden nun die folgenden beiden Fälle:

(a) M liegt im Innern oder außerhalb des Dreiecks ABC;

(b) M liegt auf einer der drei Seiten des Dreiecks ABC.

Im Falle (a) sind ABM, BCM und ACM nichtentartete Dreiecke. Wegen $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = r$ gilt daher nach der Dreiecksungleichung stets

(1) $2r = \overline{MA} + \overline{MB} > \overline{AB}$,

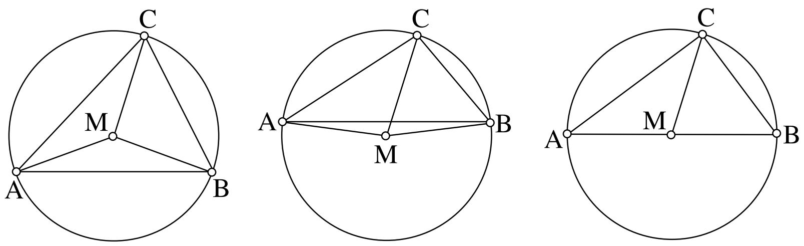
(2) $2r = \overline{MA} + \overline{MC} > \overline{AC}$,

(3) $2r = \overline{MB} + \overline{MC} > \overline{BC}$.

Durch Addition erhält man daraus

(4) $6r > \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = u$, also $r > \frac{u}{6}$.

Im Falle (b) entartet genau eines der drei betrachteten Dreiecke zu einer Strecke; an die Stelle genau einer der drei Ungleichungen tritt daher die entsprechende Gleichung. Auch in diesem Falle erhält man aus dieser Gleichung und den beiden restlichen Ungleichungen durch Addition die Ungleichung (4). Da mit (a), (b) eine vollständige Fallunterscheidung getroffen wurde, ist damit der geforderte Beweis erbracht. □



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 180736:

Angenommen, eine rationale Zahl a habe die genannte Eigenschaft. Dann gilt

(1) $a \cdot |a| = a + |a|$.

Für die Zahl a trifft nun genau einer der folgenden zwei Fälle zu:

1. Fall: $a \geq 0$.

Dann gilt $|a| = a$, also folgt aus (1)

(2) $a^2 = 2a$.

Hiernach verbleiben im 1. Fall nur die Möglichkeiten, daß entweder $a = 0$ gilt oder, falls $a \neq 0$ ist, aus (2) weiter $a = 2$ folgt.

2. Fall: $a < 0$.

Dann gilt $|a| = -a$, und es folgt einerseits $a \cdot |a| \neq 0$, andererseits $a + |a| = 0$. Die Annahme, daß a die Eigenschaft (1) hat, führt somit im 2. Fall auf einen Widerspruch.

Folglich können nur die beiden Zahlen 0 und 2 die genannte Eigenschaft haben. Tatsächlich gilt $0 \cdot |0| = 0 = 0 + |0|$ sowie $2 \cdot |2| = 4 = 2 + |2|$. Also sind genau die Zahlen 0 und 2 die gesuchten Zahlen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission