19. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1979/1980

Aufgaben und Lösungen

19. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 190731:

Ermittle alle geordneten Paare $(x;y)$ natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die zweite Zahl y ist um 1 kleiner als das Dreifache der ersten Zahl x.

(2) Das Produkt aus dem Sechsfachen der ersten und dem Vierfachen der zweiten Zahl beträgt 1680.

Aufgabe 190732:

Von drei Kreisen k_1, k_2, k_3 mit dem gleichen Radius r, aber verschiedenen Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 werde vorausgesetzt:

k_2 und k_3 schneiden einander in einem Punkt P und einem Punkt $A \neq P$.

k_3 und k_1 schneiden einander in P und einem Punkt $B \neq P$.

k_1 und k_2 schneiden einander in P und einem Punkt $C \neq P$.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Der Umkreis des Dreiecks ABC hat r als Radius!

Aufgabe 190733:

Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a = 5,5$ cm, $c = 2,5$ cm, $e = 4,5$ cm, $f = 6,0$ cm! Dabei seien a bzw. c die Längen der Seiten AB bzw. CD; e bzw. f die Längen der Diagonalen AC bzw. BD.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Untersuche, ob $ABCD$ durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 190734:

Birgit und Frank erhalten folgende Informationen über die Schüler einer Schulklasse:

Die Anzahl aller Schüler dieser Klasse ist kleiner als 40.
Genau 60% dieser Schüler nehmen an der AG "Bildende Kunst" teil,
genau 66% aller Schüler der Klasse gehen regelmäßig zum Schwimmen,
genau 50% aller Schüler der Klasse sind Leser der Kinderbibliothek.

Birgit nennt eine natürliche Zahl x und meint:

Aus den Informationen folgt, daß mindestens x Schüler dieser Klasse sowohl an der AG "Bildende Kunst" teilnehmen als auch regelmäßig zum Schwimmen gehen; dagegen folgt nicht, daß mehr als x Schüler der Klasse diese beiden Freizeitbeschäftigungen ausüben.

Frank nennt eine natürliche Zahl y und meint:

Aus den Informationen folgt, daß mindestens y Schüler dieser Klasse an allen drei Formen der Freizeitbeschäftigung (AG ”Bildende Kunst”, Schwimmen, Kinderbibliothek) teilnehmen.

a) Zeige, daß aus den gegebenen Informationen die Anzahl der Schüler der Klasse eindeutig ermittelt werden kann, und gib diese Anzahl an!

b) Ermittle eine natürliche Zahl x so, daß Birgits Aussagen wahr sind!

c) Beweise, daß Franks Aussagen für jede natürliche Zahl $y > 0$ falsch sind!

Aufgabe 190735:

Cathrin geht einkaufen. Sie hat genau 18 Geldstücke, und zwar nur Zweimark- und Fünfzigpfennigstücke, bei sich. Von dem Gesamtbetrag dieses Geldes gibt sie genau die Hälfte aus. Nach dem Einkauf stellt sie fest, daß sie jetzt wieder ausschließlich Zweimark- und Fünfzigpfennigstücke bei sich hat, und zwar soviel Zweimarkstücke wie sie vor dem Einkauf Fünfzigpfennigstücke besaß, und soviel Fünfzigpfennigstücke, wie sie vorher Zweimarkstücke hatte.

Welchen Geldbetrag besaß Cathrin noch nach dem Einkauf?

Aufgabe 190736:

Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm und E der Mittelpunkt der Seite AD. Auf CE sei ein Punkt F so gelegen, daß die Flächen der Dreiecke AFE und BCF inhaltsgleich sind.

Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks ABF!

19. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 190731:

Angenommen, für ein Paar $(x;y)$ natürlicher Zahlen seien die Bedingungen (1), (2) erfüllt. Dann gilt $y = 3x - 1$ (1) und $6x \cdot 4y = 1\,680$, also $xy = 70$ (2).

Wie man (bei Beachtung von $70 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$) durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle erkennt, wird (2) nur von folgenden Zahlenpaaren erfüllt:

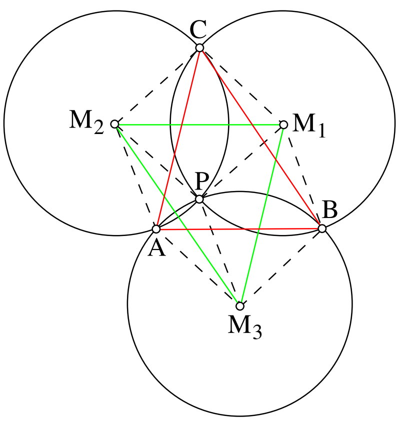
$$(1;70),\quad (2;35),\quad (5;14),\quad (7;10),\quad (10;7),\quad (14;5),\quad (35;2),\quad (70;1).$$

Von diesen Zahlenpaaren erfüllt aber nur (5;14) auch die Bedingung (1). Daher kann nur das geordnete Paar (5;14) alle gestellten Bedingungen erfüllen.

Es erfüllt diese Bedingungen tatsächlich; denn es gilt $14 = 3 \cdot 5 - 1$ und $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 14 = 30 \cdot 56 = 1\,680$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190732:



Nach Voraussetzung gilt

$\overline{PM_1} = \overline{PM_2} = \overline{PM_3} = \overline{AM_2} = \overline{AM_3} = \overline{BM_3} = \overline{BM_1} = \overline{CM_1} = \overline{CM_2} = r. \qquad (1)$

Daher sind PM_2AM_3, PM_3BM_1, PM_1CM_2 Rhomben. Also gilt $BM_3 \parallel M_1P \parallel CM_2$, $CM_1 \parallel M_2P \parallel AM_3$, $AM_2 \parallel M_3P \parallel BM_1$.

Hiernach und wegen (1) sind BCM_2M_3, CAM_3M_1, ABM_1M_2 Parallelogramme, also gilt $\overline{BC} = \overline{M_2M_3}$, $\overline{CA} = \overline{M_3M_1}$, $\overline{AB} = \overline{M_1M_2}$.

Folglich ist $\Delta ABC \cong \Delta M_1M_2M_3$ (Kongruenzsatz sss).

Nun hat $\Delta M_1M_2M_3$ wegen (1) den Kreis um P mit r als Umkreis. Also hat das zu $\Delta M_1M_2M_3$ kongruente Dreieck ABC ebenfalls r als Umkreisradius. □

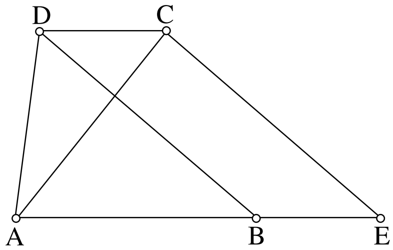
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190733:

I. Angenommen, $ABCD$ habe die verlangten Eigenschaften.

Dann schneidet die Parallele durch C zu BD die Verlängerung von AB über B hinaus in einem Punkt

E, für den $BE \parallel DC$ und $BD \parallel EC$ gilt.



Also ist $BECD$ ein Parallelogramm; daher gilt $\overline{EC} = \overline{BD}$ und $\overline{BE} = \overline{DC}$. Somit hat ΔAEC die Seitenlängen $\overline{AC} = e$, $\overline{EC} = f$ und $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} = a + c$.

II. Daher entspricht $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert eine Strecke AB der Länge a.

(2) Man verlängert AB über B hinaus um c; der erhaltene Endpunkt sei E.

(3) Man konstruiert den Kreis um A mit e und den Kreis um E mit f. Schneiden sie sich, so sei C einer ihrer Schnittpunkte.

Anmerkung: (1) bis (3) können auch zusammenfassend formuliert werden: Man konstruiert ein Dreieck AEC mit $\overline{AC} = e$, $\overline{EC} = f$ und $\overline{AE} = a + c$ sowie auf AE den Punkt B mit $\overline{AB} = a$.

(4) Man konstruiert die Parallele durch C zu AB und die Parallele durch B auf EC. Schneiden sie sich, so sei D ihr Schnittpunkt.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach (4) ist $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$. Nach (1) und (3) ist $\overline{AB} = a$ und $\overline{AC} = e$. Nach (2) und (3) ist ferner $\overline{BE} = c$, $\overline{BC} = f$, und da $BECD$ nach (4) ein Parallelogramm ist, folgt auch $\overline{DC} = \overline{BE} = c$ und $\overline{BD} = \overline{EC} = f$.

IV. Da für die gegebenen a, c, e, f je zwei der Längen e, f, $a + c$ eine größere Summe als die dritte dieser Längen haben, ergibt sich bei den Konstruktionsschritten (1) bis (3) ein bis auf Kongruenz eindeutig bestimmtes Dreieck AEC; insbesondere wird $AB \nparallel EC$. Hiernach ist auch Konstruktionsschritt (4) eindeutig ausführbar. Daher ist $ABCD$ durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190734:

a) Da $60\% = \frac{3}{5}$, $66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$ und $50\% = \frac{1}{2}$ gilt, muß die gesuchte Anzahl z durch 2, 3 und 5, wegen der paarweisen Teilerfremdheit dieser Zahlen also durch $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ teilbar sein. Wegen $0 < z < 40$ folgt somit $z = 30$.

b) Daher und wegen $\frac{3}{5} \cdot 30 = 18$, $\frac{2}{3} \cdot 30 = 20$, $\frac{1}{2} \cdot 30 = 15$ nehmen genau 18 Schüler an der AG "Bildende Kunst" teil, genau 20 der Schüler gehen regelmäßig zum Schwimmen und genau 15 der Schüler sind Leser der Kinderbibliothek.

Hiernach folgt, daß mindestens 8 Schüler dieser Klasse sowohl an der AG "Bildende Kunst" teilnehmen als auch regelmäßig zum Schwimmen gehen. Wären es nämlich weniger als 8, so gäbe es unter den 20 regelmäßig zum Schwimmen gehenden Schülern mehr als 12, die nicht an der AG "Bildende Kunst" teilnehmen. Diese Schüler und die 18 Teilnehmer der AG wären zusammen bereits mehr als 30 Schüler.

Dagegen folgt nicht, daß mindestens 9 Schüler der Klasse diese beiden Freizeitbeschäftigungen ausüben. Denn nach den Informationen ist z.B. folgende Verteilung möglich: Von den 18 Teilnehmern der AG "Bildende Kunst" gehen genau 8 zum Schwimmen, genau die anderen 10 sind Leser der Kinderbibliothek; die übrigen 12 Schüler der Klasse gehen sämtlich zum Schwimmen, genau 5 von ihnen sind außerdem Leser der Kinderbibliothek.

Damit ist bewiesen, daß Birgits Aussagen für die Zahl $x = 8$ wahr sind.

c) Wie das ebengenannte Beispiel zeigt, besteht nach den Informationen auch die Möglichkeit, daß kein Schüler der Klasse alle drei Freizeitbeschäftigungen ausübt. Für keine natürliche Zahl $y > 0$ kann daher Franks Aussage wahr sein.

Hinweis zur Korrektur: Zu c) liegt vielleicht folgender Lösungsversuch nahe:

Analog wie in b) sind mindestens 5 der Schüler Schwimmer und Leser (SL), mindestens 3 der Schüler Künstler und Leser (KL). Somit werde "wegen $8+5+3 < 30$" der Schluß verhindert, es müsse einen Schüler geben, der Künstler, Schwimmer und Leser (KSL) ist.

Dieses Argument ist nicht ausreichend; denn die Zahlen 8, 5, 3, 0 für KS, SL, KL, KSL sind nicht gleichzeitig erreichbar (da die restlichen "Nur"-K, S bzw. L jeweils 7 sein müßten, im Widerspruch zu $8+5+3+7+7+7 > 30$).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190735:

Bezeichnet man die Anzahl der Zweimarkstücke, die Cathrin vor dem Einkauf besaß, mit x, so hatte sie zur gleichen Zeit $(18 - x)$ Fünfzigpfennigstücke. Der Geldbetrag, den sie vor dem Einkauf besaß, betrug somit $(2x + (18 - x) \cdot 0,5)\,\text{Mark} = (1,5x + 9)\,\text{Mark}$.

Da sie davon genau die Hälfte ausgab, hatte sie nach dem Einkauf noch $(0,75x + 4,5)$ Mark.

Laut Aufgabe setzte sich dieser Betrag aus $(18 - x)$ Zweimarkstücken und x Fünfzigpfennigstücken zusammen. Daher gilt

$$\begin{aligned} 0,75x + 4,5 = 2\,(18 - x) + 0,5x &= 36 - 1,5x, \quad \text{woraus man} \\ 2,25x &= 31,5, \quad \text{also} \\ x &= 14 \;\; \text{erhält.} \end{aligned}$$

Folglich hatte Cathrin vor dem Einkauf genau 14 Zweimarkstücke und genau 4 Fünfzigpfennigstücke, das sind zusammen 30 Mark, bei sich. Nach dem Einkauf besaß sie genau 4 Zweimarkstücke und genau 14 Fünfzigpfennigstücke, das sind zusammen 15 Mark.

2. Lösungsweg:

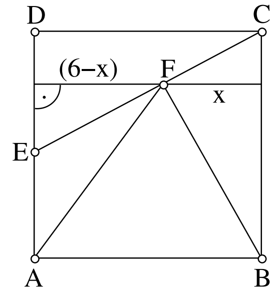
Hatte Cathrin nach dem Einkauf noch genau p Mark, so hatte sie vorher genau $2p$ Mark. Würde man ebenso viele Geldstücke (jeweils der gleichen Werte), wie sie vorher hatte, und dazu noch ebenso viele, wie sie nachher hatte, nebeneinanderlegen, so wären das einerseits genau 18 Zweimarkstücke und 18 Fünfzigpfennigstücke, also $(36 + 9)$ Mark = 45 Mark; andererseits wären es $(2p + p)\,\text{Mark} = 3p\,\text{Mark}$. Daher gilt $3p = 45$, also $p = 15$. Folglich hatte Cathrin nach dem Einkauf noch genau 15 Mark.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190736:

Das Lot von F auf CB habe die Länge x cm, das Lot von F auf AD hat dann die Länge $(6 - x)$ cm. Da die Flächeninhalte der Dreiecke AFE und BCF gleich sind und E Mittelpunkt von AD ist, gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (6 - x) &= \frac{1}{2} \cdot 6x, \quad \text{also} \\ 9 - \frac{3}{2}x &= 3x, \quad \text{woraus} \\ x &= 2 \;\; \text{folgt.} \end{aligned}$$



Für die Flächeninhalte A_{ABF}, A_{ECD}, A_{BCF}, A_{ABCD} der Dreiecke ABF, ECD, BCF bzw. des Quadrates $ABCD$ gilt

$$\begin{aligned} A_{ABF} &= A_{ABCD} - A_{ECD} - 2A_{BCF} \quad \text{und} \\ A_{ABCD} &= 36\,\mathrm{cm}^2, \\ A_{ECD} &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\,\mathrm{cm}^2 = 9\,\mathrm{cm}^2, \\ A_{BCF} &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6\,\mathrm{cm}^2 = 6\,\mathrm{cm}^2. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$A_{ABF} = 36\,\mathrm{cm}^2 - 9\,\mathrm{cm}^2 - 12\,\mathrm{cm}^2 = 15\,\mathrm{cm}^2.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission