19. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1979/1980

Aufgaben und Lösungen

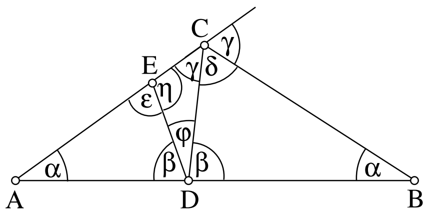
19. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 190911:

In der dargestellten Figur sei die Größe δ des Winkels $\sphericalangle DCB$ bekannt. Ferner sei vorausgesetzt, daß gleichbezeichnete Winkel auch gleiche Größen haben.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Winkelgrößen α, β, γ, ε, η und φ in Abhängigkeit von δ!



Aufgabe 190912:

	3	1	0	1	2	4	2	
3								a
3								b
1								c
2								d
2								e
0								f
2								g
	A	B	C	D	E	F	G	

Von den 49 Feldern in der Abbildung sollen einige angekreuzt werden. Je zwei angekreuzte Felder dürfen dabei höchstens einen Eckpunkt gemeinsam haben. In jeder Zeile und in jeder Spalte der Abbildung sollen genau so viele Felder angekreuzt werden, wie durch die am Rande stehenden Zahlen jeweils angegeben ist.

Ermitteln Sie für die anzukreuzenden Felder alle diejenigen Verteilungen, die diesen Forderungen entsprechen!

(Benutzen Sie zur Beschreibung des Lösungsweges die angegebenen Buchstaben! So erhält z.B. das erste Feld links oben die Bezeichnung aA.)

Aufgabe 190913:

Den Ecken eines ebenflächig begrenzten Körpers sollen Zahlen zugeordnet werden. Ist n die Anzahl der Ecken des Körpers, so soll dabei jeder Ecke genau eine der Zahlen $1, ..., n$ zugeordnet werden. Ferner soll erreicht werden: Wenn zu jeder Seitenfläche des Körpers die Summe derjenigen Zahlen gebildet wird, die den Ecken dieser Seitenfläche zugeordnet wurden, so erhält man für jede Seitenfläche des Körpers die gleiche Summe.

Beweisen Sie, daß eine solche Zuordnung möglich ist, wenn der Körper ein Würfel ist, dagegen nicht beim Tetraeder und nicht beim Oktaeder!

Aufgabe 190914:

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC.

Beschreiben Sie eine Konstruktion einer Seite eines Quadrates, das denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat!

In der Konstruktionsbeschreibung sollen wie üblich nur solche Konstruktionsschritte auftreten, die sich unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal ausführen lassen. Daß bei der Durchführung der Konstruktion (nach der von Ihnen gegebenen Beschreibung) eine Seite eines zu dem gegebenen Dreieck ABC flächeninhaltsgleichen Quadrates entsteht, ist zu beweisen.

19. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 190911:

(1) Wegen $\alpha + \beta + \delta = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck $\triangle DBC$) und $\alpha + \beta + \epsilon = 180°$ ((Winkelsumme im Dreieck $\triangle ADE$) gilt

$$\epsilon = \delta$$

(2) Wegen $\delta + 2\gamma = 180°$ (gestreckter Winkelsumme bei C) gilt

$$\gamma = 90° - \frac{\delta}{2}$$

(3) Wegen $\gamma = 2\alpha$ (Außenwinkel der Dreieck ABC) gilt $\alpha = \frac{\beta}{2}$ und wegen (2) gilt dann

$$\alpha = 45° - \frac{1}{4}\delta$$

(4) Wegen $\eta + \epsilon = 180°$ (Nebenwinkel) und wegen (1) gilt dann

$$\eta = 180° - \epsilon \qquad ; \qquad \eta = 180° - \delta$$

(5) Wegen $\gamma + \eta + \varphi = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck $\triangle EDC$) gilt $\varphi = 180° - \gamma - \eta$, und unter Berücksichtigung von (2) und (4) gilt dann

$$\varphi = 180° - \left(90° - \frac{\delta}{2}\right) - (180° - \delta) = \frac{3}{2}\delta - 90°$$

(6) Wegen $2\beta + \varphi = 180°$ (gestreckter Winkel bei D) gilt $\beta = 90° - \frac{\varphi}{2}$, und unter Berücksichtigung von (4) gilt dann

$$\beta = 90° - \left(\frac{3}{4}\delta - 45°\right) = 135° - \frac{3}{4}\delta$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 190912:
Hinweis: In den Abbildungen 1 und 2 sind diejenigen Felder, von denen gesichert ist, dass die frei bleiben mit einem Kreis gekennzeichnet.

	3	1	0	1	2	4	2	
3			○		○	×	○	a
3			○	○		○		b
1	○	○	○	○	○	×	○	c
2			○			○		d
2			○		○	×	○	e
0	○	○	○	○	○	○	○	f
2			○		○	×	○	g
	A	B	C	D	E	F	G	

Abbildung 1

	3	1	0	1	2	4	2	
3			○	×	○	×	○	a
3			○	○	×	○	×	b
1	○	○	○	○	○	×	○	c
2	○	○	○	○	×	○	×	d
2	×	○	○	○	○	×	○	e
0	○	○	○	○	○	○	○	f
2	×	○	○	○	○	×	○	g
	A	B	C	D	E	F	G	

Abbildung 2

(1) Da in Spalte F genau 4 Felder anzukreuzen sind, können das nur folgende Felder sein:
aF, cF, eF, gF.

(2) Als Nachbarfelder bleiben somit frei:
$aE, aG, cE, cG, eE, eG, gE, gG, bF, dF$ und fF.

(3) Da in Spalte C und in Zeile f keine Felder anzukreuzen sind, bleiben frei:
$aC, bC, cC, dC, eC, fC, gC, fA, fB, fD, fE$ und fG.

(4) Da in Zeile c bereit ein Feld angekreuzt ist, bleiben die übrigen frei, also (siehe Abbildung 1):
cA, cB und cD.

(5) In Spalte E sind nur noch zwei Felder frei; demnach sind anzukreuzen:
bE und dE.

(6) Als Nachbarfelder dazu bleiben frei:
bD und dD.

(7) In Spalte G sind nur noch zwei Felder frei, es sind demnach anzukreuzen:
bG und dG.

(8) In Zeile a sind nich zwei Felder anzukreuzen, eines davon muss sein:
ad.

(9) In Spalte D ist bereits ein Feld angekreuzt, also bleiben frei:
eD und gD.

(10) In Zeile d sind zwei Felder angekreuzt, die restlichen bleiben frei, d.h.:
dA und dB.

(11) In Spalte A sind anzukreuzen:
gA und eA
damit bleiben als Nachbarfelder frei (siehe Abbildung 2):
gB und eB.

(12) Für die übriggebliebenen Felder bestehen genau zwei Möglichkeiten:
Es werden angekreuzt aA und bB oder bA und aB. Damit gibt es genau zwei Verteilungen der geforderten Art.

	3	1	0	1	2	4	2	
3	X			X		X		*a*
3		X			X		X	*b*
1						X		*c*
2					X		X	*d*
2	X					X		*e*
0								*f*
2	X					X		*g*
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	

Lösung 1

	3	1	0	1	2	4	2	
3		X		X		X		*a*
3	X				X		X	*b*
1						X		*c*
2					X		X	*d*
2	X					X		*e*
0								*f*
2	X					X		*g*
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	

Lösung 2

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

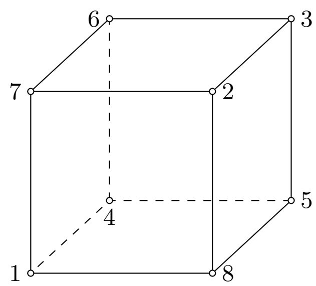
Lösung 190913:

Bei Tetraeder gehört jede Ecke genau drei Seitenflächen an, beim Oktaeder genau vier. Wenn es für diese Körper eine Zuordnung der genannten Art gäbe, so müsste folglich beim Tetraeder das Dreifach, beim Oktaeder das Vierfache der Summe aller vorkommenden Zahlen $1, ..., n$ durch die Anzahl der Seitenflächen teilbar sein.

Für das Tetraeder ist diese Bedingung nicht erfüllt; denn die Anzahl der Ecken ist $n = 4$, die Summe der Zahlen von 1 bis 4 ist 10, und das Dreifache dieser Summe ist nicht durch die Anzahl 4 der Seitenflächen teilbar.

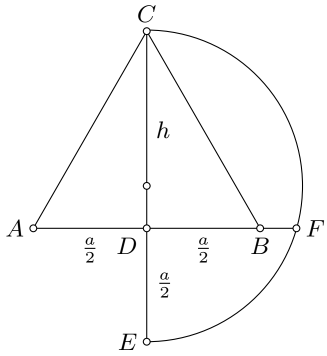
Auch für das Oktaeder ist diese Bedingung nicht erfüllt, denn die Anzahl der Ecken ist $n = 6$, die Summe der Zahlen von 1 bis 6 ist 21, und das Vierfache dieser Summe ist nicht durch die Anzahl 8 der Seitenflächen teilbar.

Damit sind die für das Tetraeder und Oktaeder verlangten Beweise geführt. Die Aussage, dass für den Würfel eine Zuordnung der genannten Art möglich ist, kann durch Angabe eines Beispiels bewiesen werden, wie es etwa die Abbildung zeigt.



Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 190914:



I. Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man fällt das Lot CD von C auf AB.

(2) Man verlängert dieses Lot über D hinaus bis zu einem Punkt E, für den $DE = AD$ gilt-

(3) Man konstruiert einen Halbkreis über CD. Er schneidet die Gerade durch A und B in einem Punkt F. Die Strecke DF hat die verlangte Eigenschaft.

II. Beweis, dass ein Quadrat mit der Seitenlänge DF denselben Flächeninhalt hat wie das Dreieck ABC (1):

Es sei $AB = a, CD = h$. Nach Konstruktionsschritt (1) ist CD eine Höhe und folglich auch Seitenhalbierende im gleichseitigen Dreieck ABC, also gilt $AD = \frac{a}{2}$. Nach (2) gilt daher ebenfalls $DE = \frac{a}{2}$.

Nach (3) und nach dem Satz von Thales ist das Dreieck DEF bei F rechtwinklig; in diesem Dreieck ist FD nach (1) und (2) die Höhe auf der Hypotenuse. Folglich gilt nach dem Höhensatz

$$DF^2 = \frac{a}{2} \cdot h$$

Der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge DF ist mithin gleich dem Flächeninhalt $\frac{a}{2} \cdot h$ des Dreiecks ABC. $\square$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission