20. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1980/1981

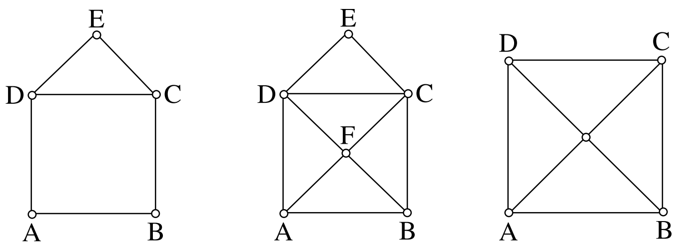
Aufgaben und Lösungen

20. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 200911:

Entscheiden Sie für jede der drei abgebildeten Figuren a, b, c, ob sie in einem Zuge gezeichnet werden kann!



(a) (b) (c)

"In einem Zuge" soll bedeuten, daß beim Zeichnen jede Strecke genau einmal durchlaufen wird, keine anderen Linien als die in der Figur enthaltenen gezeichnet werden und der Bleistift während des Zeichnens nicht abgesetzt werden muß.

Ist ein solches Zeichnen möglich, so genügt als Lösung die Angabe einer Reihenfolge, in der die mit Buchstaben bezeichneten Punkte nacheinander ereicht werden können, um die gestellte Bedingung zu erfüllen. Anderenfalls ist die Nichtausführbarkeit zu begründen.

Aufgabe 200912:

Zwei Personen, A und B, spielen ein Würfelspiel nach folgenden Regeln:

Zunächst wird eine ganze Zahl Z vereinbart. Dann würfelt jeder mit 4 Würfeln, von denen jeder, wie üblich, die Augenzahlen 1 bis 6 trägt. Gelingt es einem Spieler, unter Benutzung der von ihm mit den vier Würfeln gewürfelten Zahlen (wobei die Zahl auf jedem Würfel genau einmal zu benutzen ist) die vereinbarte Zahl Z zu bilden, so erhält er einen Gewinnpunkt.

Dabei ist gestattet, die vier Zahlen unabhängig von ihrer Reihenfolge durch die Grundrechenarten zu verknüpfen, die Potenzschreibweise zu benutzen, in beliebiger Weise Klammern zu setzen und auch, die auftretenden Zahlen als Ziffern benutzend, aus ihnen mehrstellige Zahlen zu bilden.

Als bei einer Durchführung dieses Spieles die vereinbarte Zahl $Z = 12$ lautete, ergab sich:

Die von A gewürfelten Zahlen waren vier unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Die von B gewürfelten Zahlen waren alle vier gleich ein und derselben natürlichen Zahl.

Zeigen Sie, daß für alle möglichen Würfe, die diesen Bedingungen entsprechen, sowohl der Spieler A als auch der Spieler B einen Gewinnpunkt erreichen konnte!

Aufgabe 200913:

a) Kann der Bruch $\frac{1\,711}{3\,421}$ durch eine (von 1 verschiedene) natürliche Zahl gekürzt werden?

b) Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n der Zähler und der Nenner des Bruches $\frac{14n+1}{28n+5}$ zueinander teilerfremd sind!

Hinweis: Um die Rechnung zu erleichtern, kann man einen Satz über Teilbarkeit von Differenzen anwenden.

Aufgabe 200914:

Gegeben seien ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius $r_1 = 4,5$ cm sowie ein Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius $r_2 = 2,5$ cm. Es sei $\overline{M_1M_2} = 7$ cm.

Konstruieren Sie sämtliche gemeinsamen Tangenten der Kreise k_1 und k_2! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

20. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 200911:

Die Figur in Abbildung (a) kann in einem Zuge gezeichnet werden, z.B. D, A, B, C, D, E, C.

Die Figur in Abbildung (b) kann in einem Zuge gezeichnet werden, z.B. A, F, C, B, F, D, E, C, D, A, B

Die Figur in Abbildung (c) kann nicht in einem Zuge gezeichnet werden.

Begründung: Um die Bedingung zu erfüllen, müsste es für jeden mit einem Buchstaben bezeichneten Punkt zu jeder Strecke, die zu ihm hinführt auch einen solche geben, die von ihm wegführt, damit man diesen Punkt, den man erreicht hat, auch wieder verlassen kann. Ausgenommen davon wäre lediglich Anfangs- und Endpunkt der Zeichnung.

Das heißt mit Ausnahme höchstens zweier Punkte müsste für jeden bezeichneten Punkt gelten, dass die Anzahl der in ihm zusammentreffenden Linien gerade ist. Diese Bedingung ist jedoch nicht erfüllt, da in den Punkten A, B, C und D jeweils 3 Linien zusammentreffen.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 200912:

A hatte einen der Würfe 1, 2, 3, 4; 2, 3, 4, 5; 3, 4, 5, 6;

B hatte einen der Würfe 1, 1, 1, 1; 2, 2, 2, 2; ...; 6, 6, 6, 6 erhalten.

Die Zahl $Z = 12$ kann aus diesen Würfen in der verlangten Weise z.B. folgendermaßen gebildet werden:

$1 \cdot 2^3 + 4 = 12$	$2 \cdot (4 + 5 - 3) = 12$	$6 \cdot (3 + 4 - 5) = 12$
$1 \cdot 11 + 1 = 12$	$2 \cdot (2 + 2 + 2) = 12$	$3 + 3 + 3 + 3 = 12$
$4 \cdot (4 - 4 : 4) = 12$	$(55 + 5) : 5 = 12$	$6 + 6 + 6 - 6 = 12$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 200913:

a) Wenn der Bruch $\frac{1711}{3421}$ durch eine natürliche Zahl t gekürzt werden kann, dann sind die Zahlen 1711 und 3421 durch t teilbar.

Mithin ist ebenfalls $2 \cdot 1711 = 3422$ durch t teilbar und daher auch die Differenz $3422 - 3421 = 1$. Die einzige natürliche Zahl, durch die 1 teilbar ist, ist aber $t = 1$.

Daher kann der Bruch $\frac{1711}{3421}$ durch keine natürliche Zahl gekürzt werden, die von 1 verschieden ist.

b) Ist eine natürliche Zahl t ein gemeinsamer Teiler von $14n + 3$ und $28n + 5$, so ist t ebenfalls ein Teiler von $2 \cdot (14n + 3) = 28n + 6$ und daher auch ein Teiler der Differenz $(28n + 6) - (28n + 5) = 1$. Also folgt wieder, dass $t = 1$ sein muss

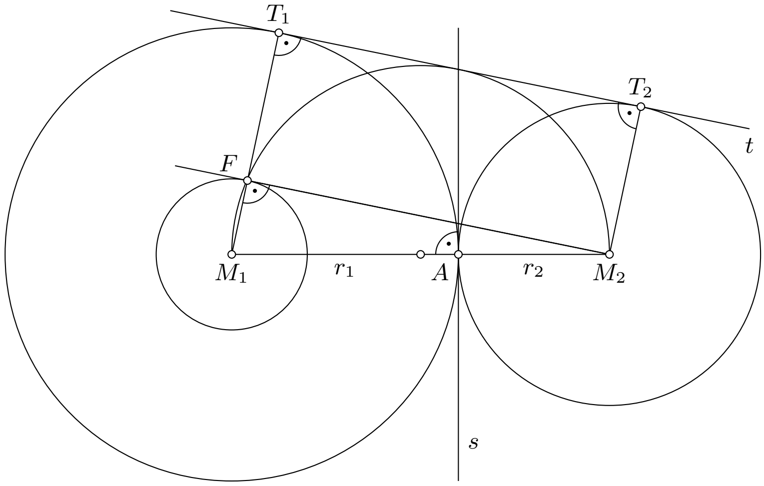
Somit haben der Zähler und der Nenner des Bruches $\frac{14n+3}{28n+5}$ den größten gemeinsamen Teiler 1, d.h. sie sind teilerfremd zueinander $\square$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 200914:

a) Da laut Aufgabe $M_1M_2 = r_1 + r_2$ gilt, berühren sich beide Kreise von außen. Daher haben sie genau eine innere gemeinsame Tangente s. Diese geht durch den Berührungspunkt A der beiden Kreise k_1 und k_2 und steht senkrecht auf M_1M_2. Daraus ergibt sich ihre Konstruktion.

b)



(I) Es sei nun t eine gemeinsame äußere Tangente der Kreise k_1 und k_2, ihre Berührungspunkte mit diesen Kreisen seien T_1 bzw. T_2. Die Parallele zu t durch M_2 schneidet M_1T_1 in einem Punkt, der F genannt sei. Dann ist $T_1T_2M_2F$ ein Rechteck, es gilt $M_1T_1 = r_1$ sowie $M_2T_2 = r_2$, also $M_1F = r_1 - r_2$.

Der Punkt F liegt daher erstens auf dem Kreise um M_1 mit $r_1 - r_2$ als Radius und wegen $\angle M_1FM_2 = 90°$ zweitens auf einem der Halbkreise über M_1M_2.

(II) Daraus ergibt sich folgende Konstruktion für eine äußere gemeinsame Tangente der Kreise k_1 und k_2:

(1) Man konstruiere den Kreis um M_1 mit $r_1 - r_2$ als Radius.

(2) Man konstruiert einen Halbkreis über M_1M_2. Sein Schnittpunkt mit dem in (1) konstruierten Kreis sei F genannt.

(3) Man zieht den Strahl aus M_1 durch F. Sein Schnittpunkt mit dem Kreis k_1 sei T_1 genannt.

(4) Man zieht die Parallele t zu M_2 durch T_1.

(III) Beweis, dass jede so konstruierte Gerade t Tangente an k_1 und k_2 ist:

Es sei T_2 der Schnittpunkt der Parallelen zu FT_1 durch M_2 mit t. Laut Konstruktion ist t parallel zu FM_2. Folglich gilt $\angle M_1FM_2 = \angle FT_1T_2 = 90°$ (als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen).

Ferner gilt $\angle FT_1T_2 + \angle M_2T_2T_1 = 180°$ (als entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen), also $\angle M_2T_2T_1 = 180° - FT_1T_2 = 180° - 90° = 90°$. Mithin ist $FT_1T_2M_2$ eine Rechteck, und es folgt $FT_1 = M_2T_2 = r_2$.

Daher ist t Tangente an k_1 und k_2.

(IV) In Konstruktionsschritt (2) gibt es genau zwei Möglichkeiten für die Konstruktion des Halbkreises. Alle anderen Konstruktionsschritte sind eindeutig ausführbar. Also gibt es für jeden der beiden Halbkreise über M_1M_2 genau eine Tangente t, insgesamt also genau zwei gemeinsame äußere Tangenten von k_1 und k_2.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission