22. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Saison 1982/1983

Aufgaben und Lösungen

22. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Aufgaben

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

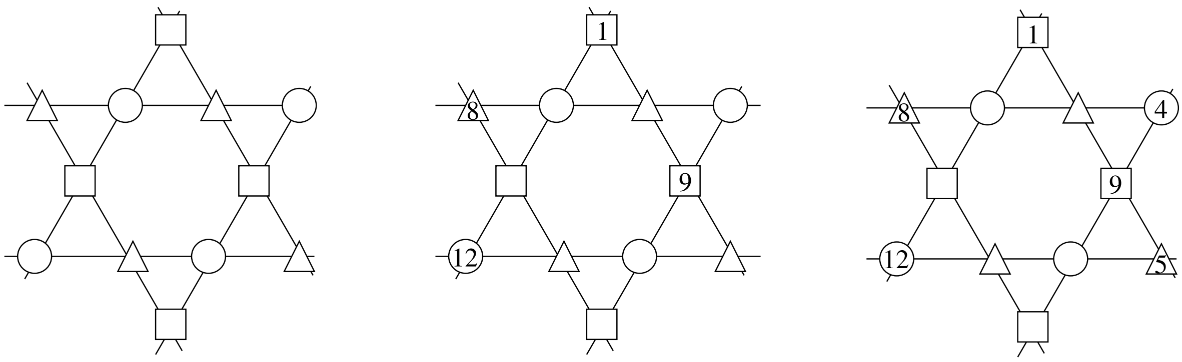
<u>Aufgabe 220511:</u>
In die 12 Felder des Bildes a sind die Zahlen von 1 bis 12 so einzutragen, daß folgendes gilt:

> Auf jeder eingezeichneten Geraden beträgt die Summe der Zahlen in den vier Feldern 26;
> die Summe der Zahlen in den vier Dreiecksfeldern beträgt 26;
> die Summe der Zahlen in den vier Kreisfeldern beträgt 26;
> die Summe der Zahlen in den vier Quadratfeldern beträgt 26.

a) Vervollständige die Eintragung Bild b), und überprüfe, ob dann alle Forderungen erfüllt sind!

b) Nenne einen Rechenweg, der zu derselben vollständigen Eintragung führt, aber nur die Vorgabe aus Bild c) benutzt!

c) Versuche, noch andere Eintragungen für Bild a) zu finden, z.B. solche, bei denen die Zahl 12 nicht in einem der sechs "äußeren" Felder steht!



a) b) c)

<u>Aufgabe 220512:</u>
Mutter kauft ein. Sie hat genau 50 M bei sich. Eigentlich möchte sie drei Schals, eine Mütze und ein Paar Handschuhe kaufen, aber das Geld reicht hierfür nicht. Eine Mütze kostet 18 M, ein Schal halb so viel, ein Paar Handschuhe kosten 1,50 M mehr als ein Schal. Sie kauft drei Schals und ein Paar Handschuhe.

Wieviel Geld hat sie danach noch insgesamt übrig?

Aufgabe 220513:

Rolf, ein Mitglied im Bezirksklub Junger Mathematiker, schreibt seinen Mitschülern die folgenden drei Gleichungen auf:

$$B \cdot J \cdot M = 135,$$
$$M + A + T + H + E = 32,$$
$$(H + E + I) : (T - E - R) = 3.$$

Er verlangt, jeden der Buchstaben A, B, E, H, I, J, M, R, T so durch eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, daß alle drei Gleichungen wahr sind. Dabei sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Zahlen, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Zahlen ersetzt werden.

a) Anke antwortet: "Ich finde schon aus der ersten Gleichung, welche drei Zahlen für B, J und M einzusetzen sind. Nur ihre Reihenfolge weiß ich noch nicht." Welche drei Zahlen sind dies!

b) Bertolt sagt: "Dann erhält man aus der zweiten Gleichung, welche Zahl M bedeutet." Wie könnte Bertolt die beiden anderen von Anke genannten Zahlen ausgeschlossen haben?

c) Nach weiterem Probieren finden die Mitschüler eine vollständige Lösung. Welche könnte es z.B. sein?

Aufgabe 220514:

Ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 cm und 7 cm soll in Quadrate zerlegt werden. Zwei dieser Quadrate sollen die Seitenlänge 3 cm haben. Die anderen Quadrate sollen dann noch so groß wie möglich sein.

a) Zeichne eine Zerlegung, von der du vermutest, daß sie die geforderten Eigenschaft hat! Wieviel Quadrate (außer den beiden der Seitenlänge 3 cm) kommen in deiner Zeichnung insgesamt vor?

b) Beweise, daß in jeder Zerlegung der geforderten Art diese anderen Quadrate alle dieselbe Seitenlänge haben müssen! Wie groß ist sie? Wie kann man die Anzahl dieser Quadrate auch rechnerisch finden, ohne sie zu zeichnen?

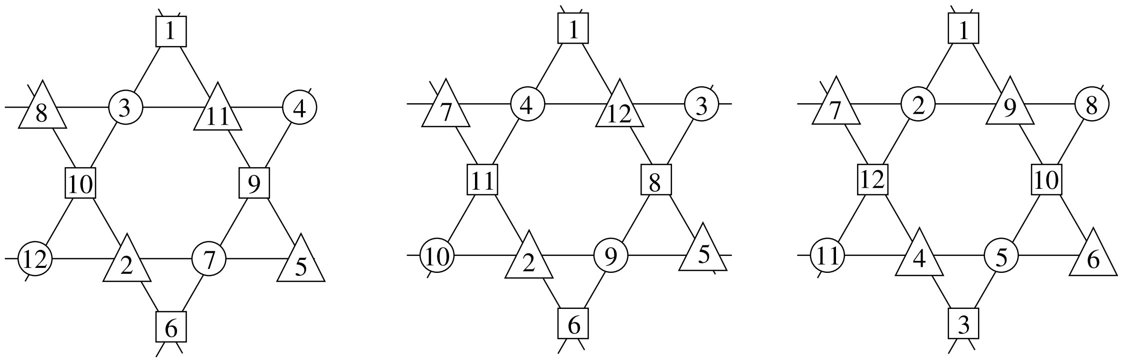
22. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 220511:

a) Die Eintragung in Abbildung a) erfüllt alle Forderungen; denn es gilt

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
8 & + & 3 & + & 11 & + & 4 & = & 26, \\
12 & + & 2 & + & 7 & + & 5 & = & 26, \\
12 & + & 10 & + & 3 & + & 1 & = & 26, \\
6 & + & 7 & + & 9 & + & 4 & = & 26, \\
6 & + & 2 & + & 10 & + & 8 & = & 26, \\
5 & + & 9 & + & 11 & + & 1 & = & 26, \\
1 & + & 10 & + & 6 & + & 9 & = & 26, \\
8 & + & 2 & + & 5 & + & 11 & = & 26, \\
12 & + & 7 & + & 4 & + & 3 & = & 26.
\end{array}$$



a) b) c)

b) Die Summe der beiden rechten Dreiecksfelder muß $26 - 1 - 9 = 16$ betragen, für das linke untere Dreiecksfeld ergibt sich also $26 - 8 - 16 = 2$. Es verbleiben die Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11. Mit ihnen kann die Summe 16 der beiden rechten Dreiecksfelder nur durch 5, 11 oder 6, 10 erreicht werden. Die Summe des rechten unteren Kreis- bzw. Dreiecksfeldes beträgt $26 - 12 - 2 = 12$; sie kann nur durch 5, 7 erreicht werden. Also muß 5 in das rechte untere Dreiecksfeld, 7 in das rechte untere Kreisfeld, 11 in das rechte obere Dreiecksfeld kommen.

Es verbleiben 3, 4, 6, 10. Die Summe der beiden oberen Kreisfelder beträgt $26-8-11 = 7$; sie kann nur durch 3, 4 erreicht werden. Die Summe des unteren Quadratfeldes und des rechten oberen Kreisfeldes beträgt $26 - 7 - 9 = 10$; sie kann nur durch 4, 6 erreicht werden. Also muß 4 in das rechte obere, 3 in das linke obere Kreisfeld, 6 in das untere Quadratfeld und hiernach 10 in das linke Quadratfeld kommen.

c) Zwei weitere Eintragungen liegen z.B. in Abbildung b und c vor.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 220512:

Ein Schal kostet halb so viel wie 18 M, also 9 M. Drei Schals kosten daher $3 \cdot 9\,\mathrm{M} = 27\,\mathrm{M}$.

Ein Paar Handschuhe kostet $9\,\mathrm{M} + 1{,}50\,\mathrm{M} = 10{,}50\,\mathrm{M}$.

Somit hat die Mutter $27\,\mathrm{M} + 10{,}50\,\mathrm{M} = 37{,}50\,\mathrm{M}$ bezahlt. Danach hat sie noch $50\,\mathrm{M} - 37{,}50\,\mathrm{M} = 12{,}50\,\mathrm{M}$ übrig.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 220513:

a) Die Primfaktorzerlegung von 135 ist $135 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Da bereits $3 \cdot 5$ (und erst recht $3 \cdot 3 \cdot 5$ bzw. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$) größer als jede der Zahlen 1, 2, ..., 9 ist, muß der Primfaktor 5 als eine der Zahlen für B, J, M genommen werden. Aus den verbleibenden drei Faktoren 3 kann man die beiden anderen der Zahlen für B, J, M nur so bilden, daß sie 3 und $3 \cdot 3 = 9$ lauten. Also sind 3, 5 und 9 die drei Zahlen für B, J, M.

b) Für A, T, H, E kommen dann nur noch vier der Zahlen 1, 2, 4, 6, 7, 8, in Frage. Wäre $M = 3$ oder $M = 5$, so müßten wegen der zweiten Gleichung die Zahlen für A, T, H, E die Summe 29 oder 27 haben. Das ist aber nicht möglich, da selbst die Summe der vier größten unter den Zahlen 1, 2, 4, 6, 7, 8 nur 25 beträgt. Also muß $M = 9$ sein.

c) Eine Lösung ist z.B.:

$$A = 8,\ B = 3,\ E = 2,\ H = 6,\ I = 4,\ J = 5,\ M = 9,\ R = 1,\ T = 7;$$

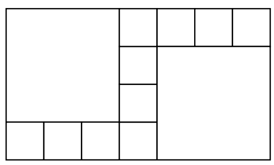
denn die Gleichungen $3 \cdot 5 \cdot 9 = 135$, $9 + 8 + 7 + 6 + 2 = 32$, $(6 + 2 + 4) : (7 - 2 - 1) = 3$ sind wahr.

Es gibt übrigens noch genau eine weitere Lösung. Sie entsteht aus der genannten durch Vertauschen von B und J. Diese Angabe und ihr Beweis werden vom Schüler nicht verlangt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 220514:

a) Eine Zerlegung liegt z.B. in der Abbildung vor. Außer den beiden Quadraten der Seitenlänge 3 cm kommen 10 Quadrate vor.



b) Da $2 \cdot 3 > 4$ ist, können die beiden Quadrate der Seitenlänge 3 cm nicht in Richtung der Rechtecksseiten zu 4 cm nebeneinander liegen, sondern nur in Richtung der Rechtecksseiten zu 7 cm. Wegen $4 - 3 = 1$ und $7 - 2 \cdot 3 = 1$ bleibt dann neben diesen Quadraten in beiden Richtungen genau 1 cm Platz. Also müssen die anderen Quadrate, da sie möglichst groß sein sollen, alle die Seitenlänge 1 cm haben.

Wegen $4 \cdot 7 = 28$ beträgt der Flächeninhalt des Rechtecks 28 cm.

Wegen $3 \cdot 3 = 9$ hat jedes der großen Quadrate den Flächeninhalt 9 cm, beide zusammen haben also den Flächeninhalt 18 cm. Für die Quadrate von je 1 cm Seitenlänge verbleibt somit der Flächeninhalt $28\,\mathrm{cm}^2 - 18\,\mathrm{cm}^2 = 10\,\mathrm{cm}^2$. Da jedes dieser Quadrate den Flächeninhalt $1\,\mathrm{cm}^2$ hat, sind es genau 10 solcher Quadrate,

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Quellenverzeichnis

(31) Broschüre vom Volk und Wissen Verlag (VWV)