22. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Saison 1982/1983

Aufgaben und Lösungen

22. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 220611:

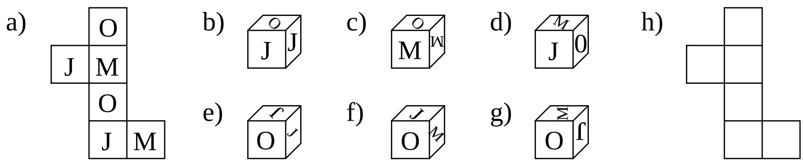
In einem Aquarium hat der Hohlraum, der mit Wasser gefüllt werden könnte, die Gestalt eines Würfels von 60 cm Kantenlänge. Dieser Hohlwürfel soll aber nur bis zu einer Höhe von 10 cm unter seinem oberen Rand gefüllt werden.

Wieviel Eimer Wasser sind dafür insgesamt erforderlich, wenn jeder Eimer 9 Liter faßt?

Aufgabe 220612:

Die sechs quadratischen Flächen der Oberfläche eines Würfels sind so mit den Buchstaben O, J, M beschriftet, wie es das Würfelnetz in Bild a) zeigt. (Der Buchstabe O gelte dabei als kreisförmig.)

a) Welche der in den Bildern b) bis g) abgebildeten Würfel könnten aus diesem Netz hergestellt worden sein? Für welche Würfel ist dies nicht möglich? (Als Lösung genügt jeweils die Angabe, ob Herstellbarkeit vorliegt, ohne Begründung.)



b) In das Würfelnetz des Bildes h) sollen die Buchstaben O, J, M so eingetragen werden, daß sich aus dem Netz ein Würfel mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) herstellen läßt:

(1) Je zwei gegenüberliegende Seitenflächen des Würfels tragen denselben Buchstaben.

(2) Der Würfel läßt sich so drehen, daß Bild d) entsteht.

(3) Der Würfel läßt sich so drehen, daß Bild g) entsteht.

Als Lösung ist eine mögliche Eintragung anzugeben, ohne Begründung, aber mit der Kennzeichnung einer Fläche, die J enthält und in Bild d) sichtbar sein soll, sowie einer Fläche, die O enthält und in Bild g) sichtbar sein soll.

Aufgabe 220613:

Bei einem Sportwettkampf beteiligten sich die Pioniere Anton, Bernd, Christian, Detlef, Ernst und Frank am Hochsprungwettbewerb. Über das Ergebnis gelten folgende Aussagen:

(1) Anton sprang höher als Frank, erreichte aber eine kleinere Sprunghöhe als Detlef.

(2) Frank und Ernst erreichten verschiedene Sprunghöhen; es ist jedoch nicht wahr, daß Frank höher als Ernst sprang.

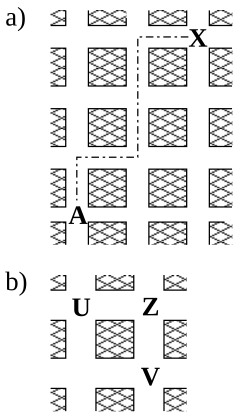
(3) Christian erreichte die gleiche Höhe wie Anton, sprang aber höher als Ernst.

(4) Es ist falsch, daß Bernd die Sprunghöhe eines anderen Pioniers erreichte oder übertraf.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Reihenfolge der Sprunghöhen der sechs Pioniere eindeutig erhalten läßt! Wenn dies möglich ist, so nenne diese Reihenfolge, und beginne dabei mit der größten Sprunghöhe!

Aufgabe 220614:

Das Bild a) zeigt einen Teil eines Stadtplanes. Ein Auto soll auf einem möglichst kurzen Weg von A zu einer anderen Kreuzung, z.B. X fahren. Als Beispiel ist ein solcher Weg eingetragen. Man will - für jede von A verschiedene Kreuzung Z - wissen, wieviel verschiedene möglichst kurze Wege von A nach Z es insgesamt gibt.



a) Suche zunächst alle diejenigen Kreuzungen, zu denen genau ein möglichst kurzer Weg von A aus hinführt!

b) Das Bild b) bedeute einen Ausschnitt aus Bild a), wobei Z eine der in a) nicht betrachteten Kreuzungen sein soll. Wenn man schon weiß, wieviel möglichst kurze Wege von A nach U es gibt und wieviel möglichst kurze Wege von A nach V es gibt, wie kann man dann die Anzahl aller möglichst kurzen Wege von A nach Z berechnen?

c) Benutze die Überlegungen zu a) und b), um für jede der elf von A verschiedenen Kreuzungen Z die gesuchte Anzahl zu finden!

d) Ermittle die Anzahl der möglichst kurzen Wege von A nach X in Bild a) noch einmal auf andere Weise: Schreibe jeden dieser Wege durch Angabe der Richtungen seiner fünf Teilstrecken auf! Benutze dabei Abkürzungen, z.B. w für waagerecht, s für senkrecht!

22. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 220611:

Wegen $60 - 10 = 50$ hat der mit Wasser zu füllende Teil des Aquariums die Gestalt eines Quaders vom Volumen

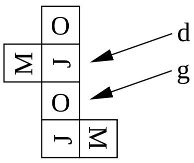
$$60\text{ cm} \cdot 60\text{ cm} \cdot 50\text{ cm} = 180\,000\text{ cm}^3 = 180\text{ dm}^3.$$

Da 1 Liter Wasser ein Volumen von 1 dm^3 hat, sind folglich 180 Liter Wasser einzufüllen. Wegen $180 : 9 = 20$ sind das genau 20 Eimer Wasser.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220612:

a) Die Würfel in den Abbildungen c), e), f) lassen sich aus dem Netz in Abbildung a) herstellen, die Würfel in den Abbildungen b), d), g) nicht.

b) 

Eine mögliche Eintragung zeigt die Abbildung.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220613:

Bezeichnet man jeweils die Sprunghöhe eines Pioniers mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens, so erhält man:

Aus (1) folgt $D > A$,

aus (3) folgt $A = C$ und $C > E$,

aus (2) folgt $E > F$,

aus (4) folgt $F > B$.

Die gesuchte Reihenfolge lautet daher:

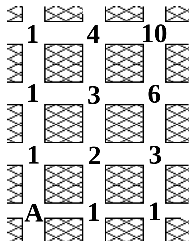
$$D > A = C > E > F > B.$$

Hinweis: Wie der Lösungsweg zeigt, werden nicht alle Angaben aus (1) bis (4) zur Ermittlung der Reihenfolge verwendet. Sie sind aber sämtlich bei der angegebenen Reihenfolge erfüllt. (Diese Feststellungen werden vom

Schüler nicht verlangt.)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220614:



a) In der Abbildung sind die gesuchten Kreuzungen mit 1 bezeichnet.

b) Jeder mögliche kurze Weg von A nach Z führt entweder über U oder über V. Von U oder V aus hat man aber jeweils nur genau eine Möglichkeit, auf möglichst kurzem Wege nach Z zu kommen. Also kann man die Anzahl aller möglichst kurzen Wege von A nach Z berechnen, indem man die entsprechenden Anzahlen für U und V addiert.

c) Ausgehend von den in a) gefundenen Kreuzungen findet man mit Hilfe der Überlegung aus b) der Reihe nach die Anzahlangaben

$$2 = 1 + 1, \qquad 3 = 1 + 2, \qquad 4 = 1 + 3, \qquad 6 = 3 + 3, \qquad 10 = 4 + 6$$

in der Abbildung.

d) Es gibt genau die folgenden möglichst kurzen Wege von A nach X:

s s s w w,
s s w s w,
s s w w s,
s w s s w,
s w s w s,
s w w s s,
w s s s w,
w s s w s,
w s w s s,
w w s s s.

Ihre Aufzählung erfolgte hier ”lexikographisch” (d.h. nach der Regel für die Anordnung in einem Lexikon), was eine bessere Übersicht zur Sicherung der Vollständigkeit ergibt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission