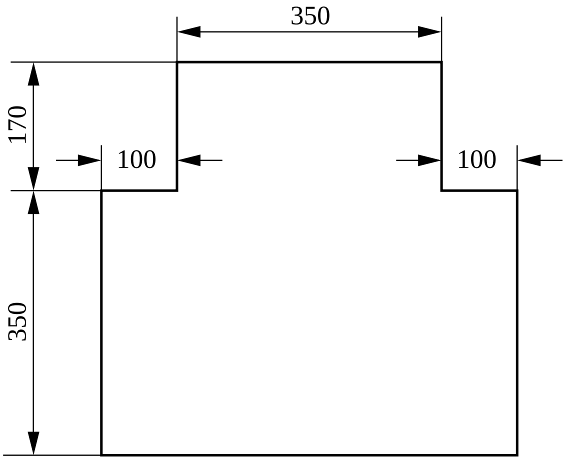
22. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Saison 1982/1983

Aufgaben und Lösungen

22. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 220621:



Die Abbildung zeigt den Grundriß eines Zimmers. Alle Maße sind in Zentimeter angegeben. Das Zimmer ist 280 cm hoch. In diesem Zimmer ist ein alter Tapetenbelag von den Wänden und von der Decke zu entfernen. Danach sind Wände und Decke mit Makulatur zu streichen und zu tapezieren.

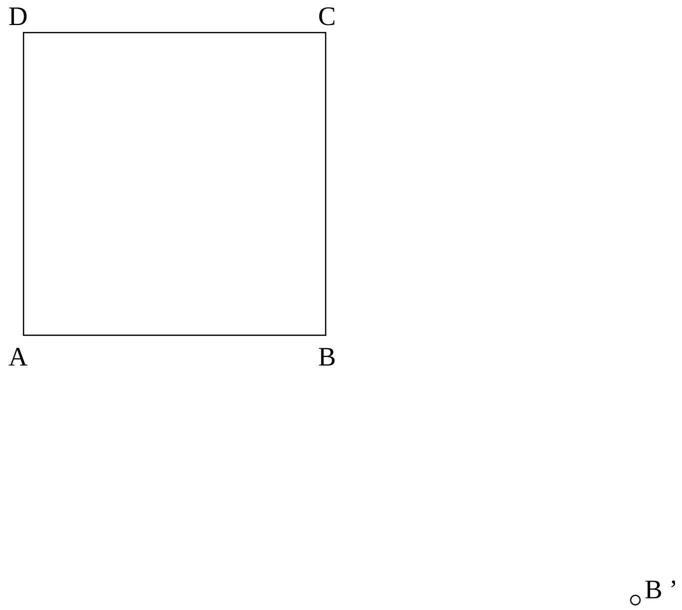
Errechne für diese Arbeiten mit Hilfe der folgenden Tabelle die insgesamt erforderlichen Lohnkosten! Dabei ist jede Wand vollständig zu berücksichtigen, auch wenn Fenster und Türen vorhanden sind. (Es wird also angenommen, daß sich die Einsparung an Fläche wieder durch den komplizierten Arbeitsaufwand ausgleicht.) Das Ergebnis ist auf vollen Markbetrag zu runden.

Leistung	Lohnkosten pro m^2
Alte Tapezierung entfernen	28 Pf
Makulatur streichen	26 Pf
Wandtapezierung	83 Pf
Deckentapezierung	112 Pf

Aufgabe 220622:

Der Punkt B' auf dem Arbeitsblatt sei das Bild von B bei der Spiegelung an einer Geraden g.

Konstruiere diese Gerade g und die Bilder A', C', D' der Punkte A, C, D bei der Spiegelung an g! Eine Beschreibung und Begründung der Konstruktion wird nicht verlangt.



Aufgabe 220623:

Die Zahl 32 soll in eine Summe aus vier natürlichen Zahlen zerlegt werden, von denen folgende Eigenschaft gefordert wird.

Wenn man zum ersten Summanden 3 addiert, vom zweiten 3 subtrahiert, den dritten mit 3 multipliziert und den vierten durch 3 dividiert, dann sind die vier Ergebnisse, die man erhält, alle gleich groß.

Nenne vier derartige Summanden! Überprüfe, daß sie alle Forderungen erfüllen! Beweise, daß die Forderungen durch keine anderen Summanden erfüllt werden können!

Aufgabe 220624:

An fünf voneinander und von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, d, e werden folgende acht Forderungen gestellt:

(1) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von e,

(2) b ist ein Teiler von c,

(3) c ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von e,

(4) d ist ein Teiler von e,

(5) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von b,

(6) b ist ein Teiler von d,

(7) c ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von a,

(8) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von d.

Untersuche, ob diese acht Forderungen erfüllbar sind und ob sich aus ihnen die Anordnung der fünf Zahlen ihrer Größe nach ergibt! Wenn dies der Fall ist, so nenne diese Anordnung; beginne dabei mit der größten der fünf Zahlen!

22. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 220621:

Folgende Wandfläche A_W ist zu bearbeiten:

$$\begin{aligned} A_W &= (350 + 170 + 100 + 350 + 550 + 350 + 100 + 170) \cdot 280\,\text{cm}^2 = 2\,140 \cdot 280\,\text{cm}^2 \\ &= 599\,200\,\text{cm}^2, \end{aligned}$$

das sind $59,92\,\text{m}^2$, also rund $60\,\text{m}^2$.

Die Lohnkosten L_W für die Bearbeitung der Wandfläche A_W betragen somit rund

$$\begin{aligned} L_W &= 60 \cdot (28 + 26 + 83)\,\text{Pf} \\ &= 60 \cdot 137\,\text{Pf} \\ &= 8\,220\,\text{Pf}, \end{aligned}$$

das sind $82,20\,\text{M}$.

Folgende Deckenfläche A_D ist zu bearbeiten:

$$\begin{aligned} A_D &= (350 \cdot 550 + 170 \cdot 350)\,\text{cm}^2 \\ &= (550 + 170) \cdot 350\,\text{cm}^2 \\ &= 720 \cdot 350\,\text{cm}^2 \\ &= 252\,000\,\text{cm}^2, \end{aligned}$$

das sind $25,2\,\text{m}^2$, also rund $25\,\text{m}^2$.

Die Lohnkosten L_D für die Bearbeitung der Deckenfläche A_D betragen somit rund

$$\begin{aligned} L_D &= 25 \cdot (28 + 26 + 112)\,\text{Pf} \\ &= 25 \cdot 166\,\text{Pf} \\ &= 4\,183\,\text{Pf}, \end{aligned}$$

das sind $41,83\,\text{M}$.

Die gesamten Lohnkosten L betragen daher

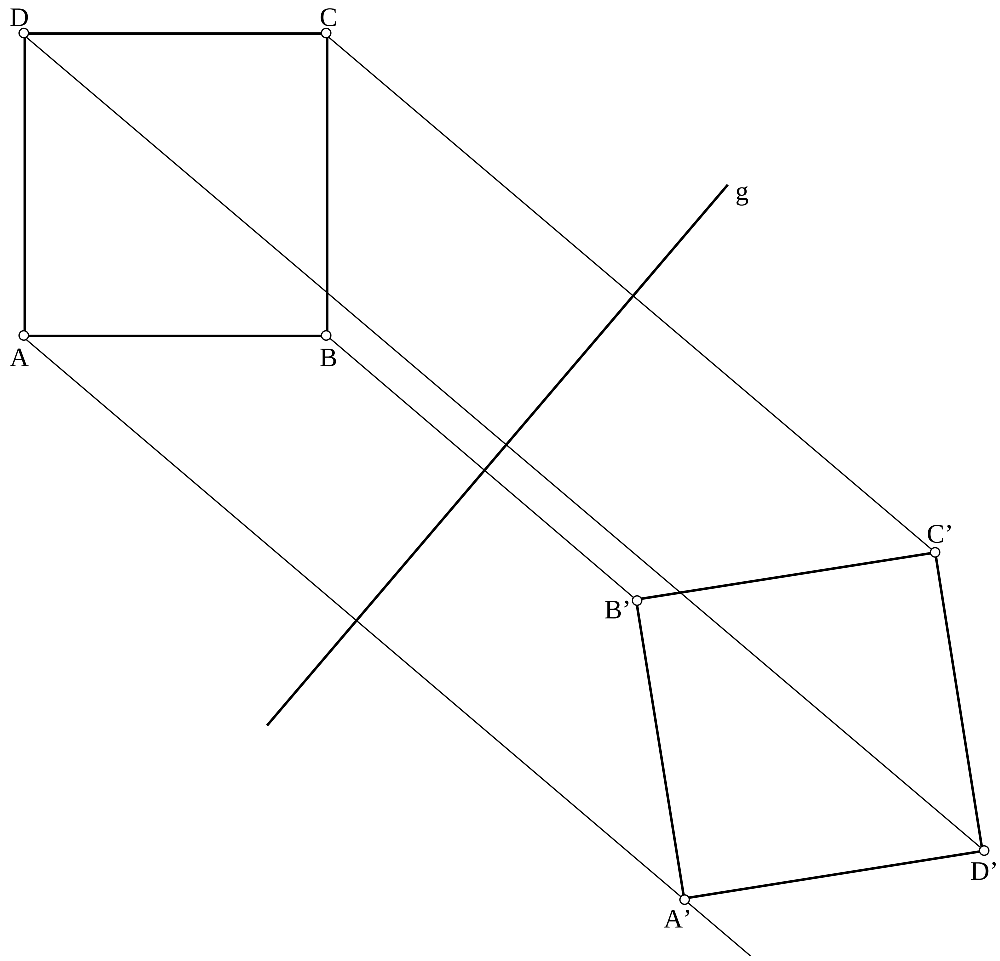
$$L = (82,20 + 41,83)\,\text{M} = 124,03\,\text{M},$$

das sind rund $124\,\text{M}$.

Hinweis: Auch Rechenwege mit weniger gerundeten Zwischenergebnissen sind zu akzeptieren. Andererseits kann man auch sogleich L_W und L_D runden. Dagegen ist es nicht sinnvoll, die Kosten je Quadratmeter vorzeitig zu runden, da sie mit großen Flächenbeträgen multipliziert werden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220622:



Hinweise zur Korrektur: Zu werten sind erstens die richtige Lage von g, A', C', D' sowie der Geraden durch A, A', B, B', C, C', D, D', zweitens die Vollständigkeit von Konstruktionshilfslinien (Kreise zur Ermittlung von Punkten, die g festlegen, sowie zum Streckenabtragen bei Ermittlung der Bildpunkte A', C', D'). Zu akzeptieren sind auch andere Konstruktionsmöglichkeiten, z.B. für C', D' nach Gewinnung von A' durch Konstruktion eines Quadrates über $A'B'$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220623:

1. Lösungsweg:

Geeignete Summanden sind 3, 9, 2 und 18 in dieser Reihenfolge; denn es gilt $3 + 9 + 2 + 18 = 32$ sowie $3 + 3 = 9 - 3 = 2 \cdot 3 = 18 : 3 = 6$.

Wäre der erste Summand eine kleinere (bzw. eine größere) Zahl als 3, so ergäbe sich durch Addition von 3 eine kleinere (bzw. eine größere) Zahl als 6. Dann müßte der zweite Summand kleiner (bzw. größer) als 9, der dritte kleiner (bzw. größer) als 2 und der vierte kleiner (bzw. größer) als 18 sein. Hiernach wäre die Summe kleiner (bzw. größer) als 32, was der Forderung der Aufgabe widerspricht. Also muß der erste Summand gleich 3 sein, woraus folgt, daß auch für die übrigen Summanden keine anderen Zahlen als die oben angegebenen den Forderungen der Aufgabe entsprechen können.

2. Lösungsweg:

I. Wenn die Forderungen durch vier Summanden erfüllt sind, so folgt:

Ist der dritte Summand x, so entsteht durch Multiplikation mit 3 die Zahl $3x$. Da diese Zahl auch entsteht, wenn man zum ersten Summanden 3 addiert, lautet der erste Summand $3x - 3$. Entsprechend lautet der zweite Summand $3x + 3$ und der vierte Summand $3x \cdot 3 = 9x$. Also gilt

$$3x - 3 + 3x + 3 + x + 9x = 32,$$

woraus $16x = 32$, also $x = 2$ folgt.

Daher können die Forderungen nur erfüllt sein, wenn der erste Summand $3 \cdot 2 - 3 = 3$, der zweite $3 \cdot 2 + 3 = 9$, der dritte 2 und der vierte $9 \cdot 2 = 18$ lautet.

II. Diese Summanden erfüllen alle Forderungen. (Überprüfung wie zu Beginn des 1. Lösungsweges)

Andere Lösungsdarstellungen sind möglich; z.B. lassen sich die hier genannten (oder ähnlich verlaufenden) Überlegungen auch tabellenmäßig wiedergeben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220624:

Aus (7) folgt $c > a$,

aus (1) folgt $a > e$,

aus (4) folgt $e > d$,

aus (6) folgt $d > b$.

Daher können nur bei der Anordnung $c > a > e > d > b$ die Forderungen (1) bis (8) erfüllt sein. Sie sind erfüllbar, z.B. durch $b = 1$, $d = 2$, $e = 4$, $a = 8$, $c = 16$;

denn

8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 4,

1 ist ein Teiler von 16,

16 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 4,

2 ist ein Teiler von 4,

8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 1,

1 ist ein Teiler von 2,

16 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 8,

8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 2.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission