22. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1982/1983

Aufgaben und Lösungen

22. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 220711:

Gegeben seien

a) ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm und vier Rechtecke mit jeweils einer Länge von 4 cm und einer Breite von 1 cm,

b) ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm und vier rechtwinklige Dreiecke mit $a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm,

c) zwei rechtwinklige Dreiecke mit $a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm, zwei rechtwinklige Dreiecke mit $a_2 = b_2 = 3$ cm sowie ein Parallelogramm mit $g = h_g = 3$ cm und $\alpha = 45°$.

Dabei seien a_1 und b_1 bzw. a_2 und b_2 die Längen derjenigen Dreiecksseiten, die den rechten Winkel einschließen; g sei die Länge einer Seite des Parallelogramms und h_g die Länge der auf dieser Seite senkrecht stehenden Höhe sowie α die Größe eines Innenwinkels des Parallelogramms.

Lege die bei a), b) und c) genannten fünf geometrischen Figuren jeweils so, daß sie eine Quadratfläche vollständig bedecken, ohne sich gegenseitig ganz oder teilweise zu überlagern und ohne über die bedeckte Quadratfläche irgendwo hinauszuragen!

Als Lösung genügt für jede der Aufgaben a), b), c) eine Zeichnung.

Aufgabe 220712:

Die (untereinander nicht verwandten) Ehepaare Meier und Schmidt machen gemeinsam mit ihren Kindern eine kurze Urlaubsfahrt und nehmen dazu einen größeren Vorrat an Papierservietten mit. Jeder Teilnehmer erhält zu jeder Mahlzeit eine Serviette. Von jedem Teilnehmer wurde dieselbe Anzahl Mahlzeiten eingenommen, und zwar mehr als eine. - Nach Abschluß der Fahrt stellte man fest, daß genau 121 Servietten verbraucht wurden.

Wieviel Kinder dieser Familie nahmen insgesamt an der Reise teil?

Aufgabe 220713:

Zwei landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaften (LPG) A und B wollen einen Entwässerungsgraben von $2,4$ km Länge säubern. Der LPG A gehören davon $1,5$ km, die LPG B besitzt die übrigen $0,9$ km. Damit diese wichtige Arbeit in kurzer Zeit geschafft wird, hilft auch die LPG C mit. Die drei LPG führen die Säuberungsarbeiten so durch, daß jede einen gleichlangen Grabenabschnitt übernimmt.

Danach ist an die LPG C für die von ihren Mitgliedern geleistete Arbeit ein Betrag von insgesamt 240 M durch die LPG A und B zu zahlen. Jede dieser beiden LPG zahlt davon soviel, wie es der Länge des Grabenstücks entspricht, dessen Reinigung die LPG C für sie übernommen hat.

Berechne die beiden von den LPG A und B gezahlten Beträge!

Aufgabe 220714:

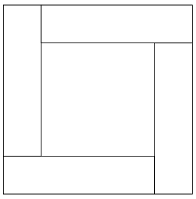
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Ferner sei AB ein Durchmesser von k. Durch A sei eine von AB verschiedene Sehne AC, durch B die zu AC parallele Sehne BD gezogen.

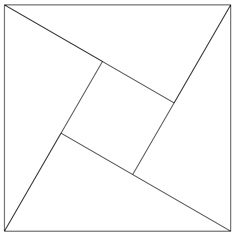
Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen die Kongruenz der Dreiecke ACM und BDM folgt!

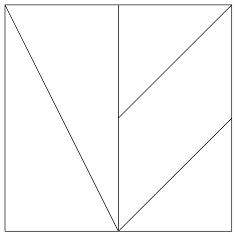
22. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 220711:

a) 

b) 

c) 

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220712:

Die Anzahl der verbrauchten Papierservietten ist gleich dem Produkt aus der Anzahl der Teilnehmer und der Anzahl der von jedem Teilnehmer eingenommenen Mahlzeiten.

Nun ist $121 = 11 \cdot 11$ die einzige Faktorenzerlegung, die hier in Frage kommt; denn $121 = 1 \cdot 121$ scheidet aus, da sowohl die Anzahl der Teilnehmer als auch die Anzahl der Mahlzeiten jedes Teilnehmers größer als 1 war.

Folglich haben insgesamt 11 Familienmitglieder, mithin also genau 7 Kinder an der Urlaubsfahrt teilgenommen.

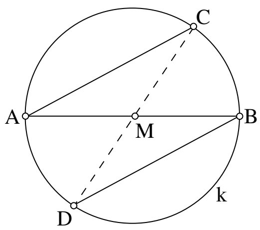
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220713:

Jede LPG säuberte ein Drittel des $2,4$ km langen Grabens, also $0,8$ km. Diese Länge entspricht daher den 240 M, die die LPG C bekommt. Für je $0,1$ km erhält die LPG C somit jeweils 30 M. Von den $0,9$ km der LPG B wurden $0,8$ km mit eigenen Kräften und folglich $0,1$ km durch die LPG C gesäubert. Die LPG B zahlte daher 30 M, die LPG A die restlichen 210 M an die LPG C.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220714:



Da M der Mittelpunkt von k und damit auch der Mittelpunkt des Durchmessers AB ist, gilt

(1) $\overline{AM} = \overline{BM}$.

Wegen $AC \parallel BD$ (und da M auf AB liegt) gilt nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen

(2) $\overline{\sphericalangle CAM} = \overline{\sphericalangle DBM}$.

Da Radien eines Kreises stets gleich lang sind, sind die Dreiecke AMC, BMD gleichschenklig mit AC bzw. BD als Basis. Nach dem Satz über die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck folgt daher $\overline{\sphericalangle CAM} = \overline{\sphericalangle ACM}$ und $\overline{\sphericalangle DBM} = \overline{\sphericalangle BDM}$. Zusammen mit (2) ergibt sich somit

(3) $\overline{\sphericalangle ACM} = \overline{\sphericalangle BDM}$

Aus (1), (2), (3) folgt nach dem Kongruenzsatz (sww), daß die Dreiecke ACM und BDM kongruent sind.

Hinweis: Der Kongruenzsatz (sws) führt nicht ohne weiteres zum Ziel, weil man $\overline{\sphericalangle AMC} = \overline{\sphericalangle BMD}$ als Gleichheit von Scheitelwinkeln erst erhalten kann, wenn man zur Verfügung hat, daß M auf CD liegt. Das müßte aber erst aus den Voraussetzungen hergeleitet werden.

Der Kongruenzsatz (ssw) führt ebenfalls nicht ohne weiteres zum Ziel, weil er nur anwendbar ist, wenn $\sphericalangle CAM$ der größeren Seite gegenüberliegt, was nicht der Fall sein muß.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission