22. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1982/1983

Aufgaben und Lösungen

22. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 220731:

Die Konsumgenossenschaft erstattet in jedem Jahr 1,6% desjenigen Betrages zurück, für den Konsummarken abgerechnet wurden. Von vier Familien A, B, C und D ist aus einem Jahr bekannt:

A hatte für einen doppelt so großen Betrag abgerechnet wie B oder, was dasselbe war, für einen dreimal so großen wie C bzw. für einen viermal so großen wie D; die vier Familien A, B, C, D erhielten zusammen 336 DM zurückerstattet.

Für jede der vier Familien A, B, C, D soll aus diesen Angaben ermittelt werden:

a) Für welchen Betrag hatte diese Familie in diesem Jahr Konsummarken abgerechnet?

b) Welchen Betrag erhielt daher diese Familie zurückerstattet?

Aufgabe 220732:

Petra schreibt nacheinander sechs natürliche Zahlen auf. Die erste Zahl wählt sie beliebig, jede weitere genau um 7 größer als das Doppelte der jeweils vorangehenden Zahl. Sie stellt fest, daß die Summe der sechs aufgeschriebenen Zahlen durch 21 teilbar ist.

a) Bilde ein Beispiel, und bestätige in diesem Beispiel Petras Feststellung!

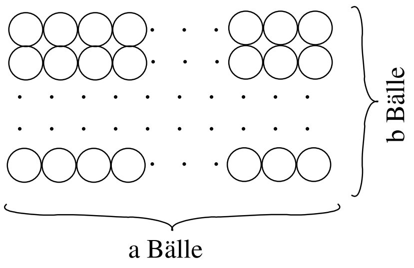
b) Beweise, daß bei jeder beliebigen Wahl der ersten Zahl die beschriebene Rechnung zu einer Summe führt, die durch 21 teilbar ist!

Aufgabe 220733:

Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ aus $a = 5,0$ cm, $b = 3,5$ cm, $c = 2,5$ cm und $h = 3,0$ cm! Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und h der Abstand der beiden parallelen Seiten AB und DC voneinander.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Längen ein Trapez $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 220734:



Im Schaufenster eines Sportgeschäftes befindet sich ein Stapel aus 550 gleichgroßen Bällen. Der Stapel besteht aus waagerechten Schichten. Jede Schicht enthält Bälle in einer rechteckigen Anordnung, wie sie die Abbildung zeigt. Die Anzahlen a und b sind in jeder Schicht genau um 1 kleiner als die entsprechenden Anzahlen in der darunterliegenden Schicht. In der untersten Schicht ist 10 die kleinere der beiden Anzahlen a, b. In der obersten Schicht ist 1 die kleinere der beiden Anzahlen a, b.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Bälle in der untersten Schicht!

Aufgabe 220735:

Beweise folgenden Satz!

Wenn $PQRS$ ein Trapez mit $PQ \parallel SR$ ist und wenn T der Schnittpunkt der Diagonalen PR und QS ist, dann haben die Dreiecke PST und QRT einander gleichen Flächeninhalt.

Aufgabe 220736:

Von fünf Punkten A, B, C, D, M wird folgendes vorausgesetzt:

M ist der Mittelpunkt der Stecke AB; die vier Punkte B, C, D, A liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über AB; es gilt $AB \parallel DC$; die Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle CMD$ sind einander gleich groß.

Zeige, daß durch diese Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\sphericalangle BAC$ eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Winkelgröße!

22. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 220731:

a) Der Betrag, für den die Familie A, B, C bzw. D Konsummarken abgerechnet hatte, sei a, b, c bzw. d. Dann gilt $b = \frac{1}{2}a$, $c = \frac{1}{3}a$, $d = \frac{1}{4}a$.

Die vier Familien hatten also zusammen für den Betrag $a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}a$ abgerechnet. Da 1,6% hiervon 336 M sind, gilt

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}a &= \tfrac{336 \cdot 100}{1{,}6}\ \mathrm{M}, \\ \frac{25}{12}a &= 21\,000\ \mathrm{M}, \\ a &= \tfrac{12 \cdot 21\,000}{25}\ \mathrm{M} = 10\,080\ \mathrm{M} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \cdot 10\,080\ \mathrm{M} = 5\,040\ \mathrm{M}, \\ c &= \frac{1}{3} \cdot 10\,080\ \mathrm{M} = 3\,360\ \mathrm{M}, \\ d &= \frac{1}{4} \cdot 10\,080\ \mathrm{M} = 2\,520\ \mathrm{M}, \end{aligned}$$

b) Familie A erhielt $\frac{10\,080 \cdot 1{,}6}{100}\ \mathrm{M} = 161,28\ \mathrm{M}$,

Familie B erhielt $\frac{5\,040 \cdot 1{,}6}{100}\ \mathrm{M} = 80,64\ \mathrm{M}$,

Familie C erhielt $\frac{3\,360 \cdot 1{,}6}{100}\ \mathrm{M} = 53,76\ \mathrm{M}$,

Familie D erhielt $\frac{2\,520 \cdot 1{,}6}{100}\ \mathrm{M} = 40,32\ \mathrm{M}$.

Hinweis: Die acht gesuchten Beträge können auch (auf mehrere Arten) in anderer Reihenfolge ermittelt werden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220732:

a) Wählt man als erste Zahl z.B. 0, so ergibt sich

als zweite Zahl $2 \cdot 0 + 7 = 7$,
als dritte Zahl $2 \cdot 7 + 7 = 3 \cdot 7 = 21$,

als vierte Zahl $2 \cdot 21 + 7 = 7 \cdot 7 = 49$,
als fünfte Zahl $2 \cdot 49 + 7 = 15 \cdot 7 = 105$,
als sechste Zahl $2 \cdot 105 + 7 = 31 \cdot 7 = 217$

und damit als Summe $57 \cdot 7 = 399$. Wegen $399 : 21 = 19$ ist diese Summe durch 21 teilbar.

b) Wählt man als erste Zahl n, so ergibt sich

als zweite Zahl $2n + 7$,
als dritte Zahl $2 \cdot (2n + 7) = 4n + 21$,
als vierte Zahl $2 \cdot (4n + 21) = 8n + 49$,
als fünfte Zahl $2 \cdot (8n + 49) = 16n + 105$,
als sechste Zahl $2 \cdot (16n + 105) = 32n + 217$

und damit als Summe $(1+2+4+8+16+32)n + 399 = 63n + 399$. Wegen $(63n + 399) : 21 = 3n + 19$ ist diese Summe durch 21 teilbar. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220733:

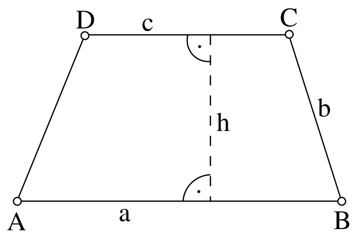
I. Wenn $ABCD$ ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften ist, so folgt:

Es gilt $\overline{AB} = a$.

Ferner ist die Gerade durch C, D parallel zur Geraden durch A, B und hat von ihr den Abstand h.

Weiterhin gilt $\overline{BC} = b$.

Schließlich ist $\overline{CD} = c$, und D liegt auf derselben Seite der Geraden durch B, C wie A.



II. Daher ist $ABCD$ nur dann ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften, wenn A, B, C und D durch folgende Konstruktion erhalten werden können:

(1) Man konstruiert eine Strecke AB der Länge a.

(2) Man konstruiert eine Parallele p zu AB im Abstand h.

(3) Man konstruiert den Kreis k um B mit dem Radius b und bezeichnet einen Schnittpunkt von p und k mit C.

(4) Man konstruiert den Kreis k' um C mit dem Radius c und bezeichnet denjenigen Schnittpunkt von p und k', der auf derselben Seite der Geraden durch B, C wie A liegt, mit D.

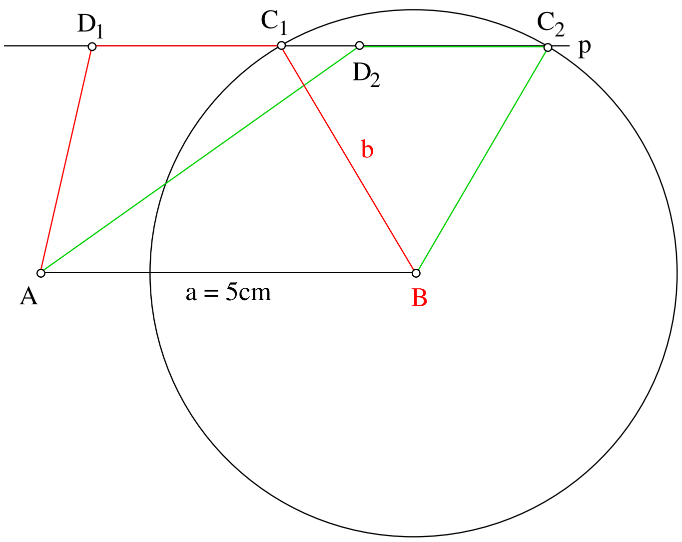
III. Beweis, daß für so konstruierte A, B, C, D stets $ABCD$ ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften ist:

Nach (2), (3), (4) ist $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel DC$, in dem AB und DC den Abstand h voneinander haben; nach (1) ist $\overline{AB} = a$, nach (3) ist $\overline{BC} = b$, und nach (4) ist $\overline{CD} = c$.

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Wegen $b > h$ ist Konstruktionsschritt (3) ausführbar und ergibt zwei verschiedene Schnittpunkte C_1, C_2 von p und k (siehe Abbildung). Danach ist Konstruktionsschritt (4) jeweils eindeutig ausführbar, ergibt also zu C_1, genau einen Punkt D_1 und zu C_2 genau einen Punkt D_2.

Bei (3) entsteht wegen $b > h$ ein gleichschenkliges Dreieck BC_1C_2, dessen Basiswinkel bei C_1 und C_2 folglich spitze Winkel sind. Wählt man die Bezeichnungen wie in der Abbildung (C_1 auf derselben Seite der Geraden durch B, C_2 wie A), so gilt also $\overline{\sphericalangle BC_1D_1} > \overline{\sphericalangle BC_1C_2} = \overline{\sphericalangle BC_2C_1} = \overline{\sphericalangle BC_2D_2}$; daher sind die Trapeze ABC_1D_1 und ABC_2D_2 nicht kongruent.

Also ist ein Trapez $ABCD$ durch die gegebenen Längen nicht bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.



Hinweis: In IV. wurde die Inkongruenz in dem Sinne bewiesen, daß keine Bewegung A, B, C_1, D_1 in *dieser* Reihenfolge in A, B, C_2, D_2 überführt. Man kann auch beweisen, daß keine Bewegung A, B, C_1, D_1 in *irgendeiner* Reihenfolge in A, B, C_2, D_2 überführt. Diese Feststellungen werden vom Schüler nicht verlangt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220734:

O.B.d.A. sei in der untersten Schicht $b = 10$ die kleinere der beiden Anzahlen a, b und $a = x$ die größere. Dann ist in den folgenden Schichten jeweils $b = 9$, $b = 8$,..., $b = 1$ die kleinere und $a = x - 1$, $a = x - 2$,..., $a = x - 9$ die größere der beiden Anzahlen a, b.

Daraus folgt

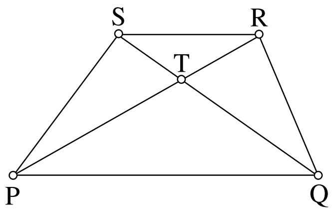
$$\begin{aligned} 550 &= \\ &= 10x + 9(x-1) + 8(x-2) + 7(x-3) + 6(x-4) + 5(x-5) + 4(x-6) + 3(x-7) + 2(x-8) + (x-9), \\ &= 10x + 9x + 8x + 7x + 6x + 5x + 4x + 3x + 2x + x - 9 - 16 - 21 - 24 - 25 - 24 - 21 - 16 - 9, \\ &= 55x - 165, \\ &\Rightarrow x = 13. \end{aligned}$$

In der untersten Schicht liegen folglich $10 \cdot 13$ Bälle, d.s. 130 Bälle.

Hinweis zur Korrektur: Da die Existenz eines Stapels mit den genannten Eigenschaften der Aufgabenstellung entnommen werden kann, ist eine Probe nicht für eine vollständige Lösung erforderlich.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220735:

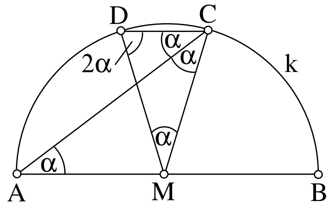


Wegen $PQ \parallel SR$ haben die Dreiecke PQS und PQR zu ihrer gemeinsamen Seite PQ als Grundlinie gleichlange Höhen. Also haben sie einander gleichen Flächeninhalt. Subtrahiert man von ihm den Flächeninhalt des Dreiecks PQT, so ergibt sich, daß die Dreiecke PST und QRT einander gleichen Flächeninhalt haben. $\square$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220736:

Aus den Voraussetzungen folgt



$\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle BAC} = \alpha$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) und

$\overline{\sphericalangle ACM} = \overline{\sphericalangle BAC} = \alpha$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ACM),

also $\overline{\sphericalangle DCM} = 2\alpha$ und daher auch $\overline{\sphericalangle CDM} = 2\alpha$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck CDM).

Hieraus und aus $\overline{\sphericalangle CMD} = \alpha$ ergibt sich nach dem Winkelsummensatz, angewandt auf das Dreieck CDM, $5\alpha = 180°$, also $\alpha = 36°$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission