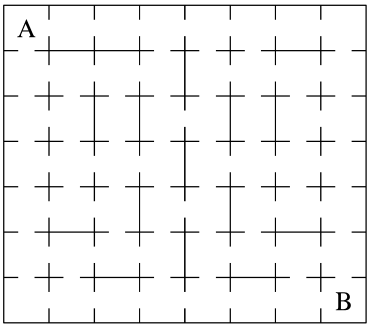
23. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1983/1984

Aufgaben und Lösungen

23. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 230711:



Der Weg von A nach B soll durch alle 56 Felder der untenstehenden Figur führen. Dabei soll jedes Feld nur einmal betreten und jede "Tür" höchstens einmal benutzt werden.

Gib einen solchen Weg an! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 230712:

Ein Kraftwagen fährt auf einer Autobahn mit einer konstanten Geschwindigkeit von $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein zweiter Kraftwagen befindet sich 2 km hinter dem ersten und fährt in derselben Richtung mit einer konstanten Geschwindigkeit von $85\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Wieviel Minuten benötigt der zweite Kraftwagen, bis er den ersten einholt?

b) Wieviel Kilometer legt der zweite Kraftwagen zurück, bis er den ersten einholt?

Aufgabe 230713:

Es sei $ABCD$ ein Rechteck, dessen Diagonalen einander im Punkt S schneiden. Der Winkel $\sphericalangle ASB$ habe die Größe 120°.

Ermittle die Diagonalenlängen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ in Abhängigkeit von der Seitenlänge $\overline{BC}$!

Aufgabe 230714:

Zwei Spieler A und B spielen auf einem "2 x 10 - Brett" folgendes Spiel:

a										
b										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Zu Beginn lost A in jeder der Zeilen a und b ein Feld aus und besetzt es jeweils mit einem weißen Stein. Danach lost B ebenfalls in jeder der Zeilen a und b ein Feld aus, das aber stets rechts von dem von A ausgelosten Feld liegen muß, und besetzt es jeweils mit einem schwarzen Stein. Beispielsweise ist "Weiß: $a9$, $b2$; Schwarz: $a10$, $b7$ (Abbildung unten), eine mögliche Anfangsstellung.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a									○	●
b		○					●			

Nun ziehen A und B abwechselnd, wobei A beginnt. Wer am Zug ist, muß (genau) einen seiner beiden Steine in dessen Zeile um mindestens ein Feld, jedoch höchstens bis zum Spielfeldrand bzw. bis zum Feld unmittelbar neben dem gegnerischen Stein beliebig nach links oder nach rechte ziehen. Sieger ist, wer die Steine des Gegners so blockiert, daß dieser nicht mehr ziehen kann.

a) Gib für folgende Anfangsstellungen an, wie A ziehen und dann auf jede Zugmöglichkeit von B so antworten kann, daß er mit Sicherheit siegt:

(1) Weiß: $a9$, $b2$; Schwarz: $a10$, $b7$.

(2) Weiß: $a3$, $b5$; Schwarz: $a8$, $b6$.

(3) Weiß: $a8$, $b4$; Schwarz: $a10$, $b7$.

(4) Weiß: $a4$, $b2$; Schwarz: $a8$, $b9$.

b) Entscheide, ob A von den folgenden Anfangsstellungen aus den Sieg erzwingen kann:

(5) Weiß: $a2$, $b4$; Schwarz: $a7$, $b9$.

(6) Weiß: $a6$, $b2$; Schwarz: $a8$, $b5$.

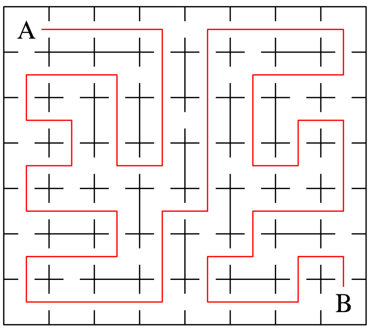
(7) Weiß: $a5$, $b3$; Schwarz: $a8$, $b6$.

c) An welchen Merkmalen einer Anfangsstellung kann man stets erkennen, ob A den Sieg erzwingen kann?

23. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 230711:



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

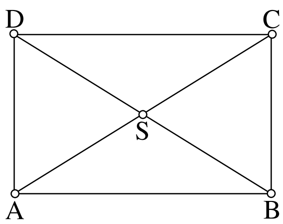
Lösung 230712:

a) Da die Geschwindigkeit des zweiten Kraftwagens um $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ größer ist als die des ersten Kraftwagens, legt der zweite Kraftwagen 5 km mehr in der Stunde zurück als der erste. In $\frac{1}{5}$ h, d.h. in 12 Minuten, kommt er dem ersten Kraftwagen um 1 km näher, also hat er den ersten Kraftwagen in $2 \cdot 12$ Minuten = 24 Minuten eingeholt.

b) In dieser Zeit hat er eine Entfernung von $85 \cdot \frac{2}{5}$ km = 34 km zurückgelegt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 230713:



Da im Rechteck die Diagonalen gleichlang sind und einander halbieren, gilt

(1) $\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS}$

Das Dreieck BCS ist somit gleichschenklig, demnach gilt

(2) $\overline{\sphericalangle CBS} = \overline{\sphericalangle BCS}$

Nach dem Innenwinkelsatz gilt daher

(3) $\overline{\sphericalangle CBS} + \overline{\sphericalangle BCS} + 60^\circ = 180^\circ$

Aus (2) und (3) folgt $\overline{\sphericalangle CBS} = \overline{\sphericalangle BCS} = 60^\circ$, also ist das Dreieck BCS gleichseitig, und es gilt

(4) $\overline{BC} = \overline{BS}$.

Wegen $2\overline{BS} = \overline{BD}$ ist $\overline{BD} = 2\overline{BC}$. Aus (1) und (4) folgt $\overline{AC} = \overline{BD} = 2\overline{BC}$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 230714:

a) (1) A zieht $b2$ nach $b6$. Dann kann B nur noch den Stein $b7$ nach rechts ziehen. Jedesmal antwortet A, indem er seinen b-Stein wieder unmittelbar links neben den schwarzen Stein zieht. Dadurch wird B schließlich auf $b10$ gezwungen und von A mit $b9$ blockiert.

(2) A zieht $a3$ nach $a7$. Dann kann B jeden seiner Steine nur noch nach rechts ziehen. A rückt wieder nach, unmittelbar links daneben. Dadurch wird einer der schwarzen Steine auf Spalte 10 gezwungen, und es geht entsprechend wie in (1) weiter.

(3) A zieht $b4$ nach $b5$. Zieht dann B einen Stein nach links, so ist er unmittelbar rechts neben einem weißen Stein, und A kann wie in (2) den Sieg erzwingen. Will B das aber vermeiden, indem er seinen b-Stein nach rechts zieht, so rückt A stets ebenso viele Felder mit seinem b-Stein nach rechts. Spätestens wenn B so auf $b10$ gezogen hat, ist er gezwungen, einen Stein nach links zu ziehen, also kann A den Sieg erzwingen.

(4) A zieht $b2$ nach $b5$. Zieht dann B nach rechts, so rückt A mit seinem Stein auf derselben Zeile ebenso viele Felder nach. Schließlich muß B nach links ziehen; dann kann A erreichen, daß der Zwischenraum zwischen den Steinen für beide Zeilen dieselbe Länge hat, aber eine kleinere als drei Felder. Das läßt sich wiederholen, so daß A zu Stellungen der Art (2) oder (3) - nämlich auf beiden Zeilen mit Zwischenraum ein Feld bzw. ohne Zwischenraum zwischen den zwei Steinen - gelangt und so den Sieg erzwingt.

b) (5) Hier kann A nicht gewinnen, wenn B das aus (4) ersichtliche Verfahren einschlägt, d.h.: Falls A nach links zieht, rückt B ebenso viele Felder nach; falls A nach rechts zieht, erzielt B auf beiden Zeilen gleichlange Zwischenräume, aber kürzer als vorher. Schließlich hat B beide Steine unmittelbar rechts neben die weißen Steine gebracht und folgt ihnen unmittelbar, bis sie auf Spalte 1 blockiert sind.

(6),(7) Dasselbe gilt für (7), während (6) wieder wie bei (4) die Möglichkeit für A bietet, den Sieg zu erzwingen.

c) Von einer Anfangsstellung aus kann A genau dann den Sieg erzwingen, wenn die Zwischenräume, die sich in den Zeilen a und b jeweils zwischen dem weißen und dem schwarzen Stein befinden, verschieden lang sind.

Beweis:

I. Wenn die genannten Zwischenräume verschieden lang sind, kann A den Sieg folgendermaßen erzwingen: Im ersten Zug erreicht er, daß die Zwischenräume gleich lang werden. Zieht B dann nach rechts, so rückt A in derselben Zeile um ebenso viele Felder nach. Schließlich muß B nach links rücken, und A kann eine Stellung mit gleichlangen aber kürzeren Zwischenräumen in beiden Zeilen erreichen. Auf diese Weise erzwingt A nach endlich vielen Zügen stets, daß in beiden Zeilen die Steine unmittelbar benachbart sind, B muß daher nach rechts ziehen, worauf A dichtauf folgen kann, bis B blockiert ist.

II. Wenn die genannten Zwischenräume gleich lang sind, so kann A den Sieg nicht erzwingen. A muß nämlich (falls er nicht schon in der Anfangsstellung blockiert ist) im ersten Zug eine Stellung herbeiführen, in der die genannten Zwischenräume verschieden lang sind. Von dieser Stellung aus kann dann B nach dem in I. geschilderten Verfahren den Sieg erzwingen.

Hinweis: Wenn zuerst die Aufgabe c) gelöst wird, können a) und b) kurz unter Berufung auf die Ausführungen in c) beantwortet werden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission