23. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1983/1984

Aufgaben und Lösungen

23. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 230721:

Uwes Schulweg führt am Rathaus und am Bahnhof vorbei. Am Rathaus hat Uwe ein Viertel des Weges geschafft; die Rathausuhr zeigt 7.30 Uhr an. Am Bahnhof hat Uwe ein Drittel des Weges hinter sich; die Bahnhofsuhr zeigt 7.32 Uhr an.

Um wieviel Uhr trifft Uwe in der Schule ein, wenn er während den gesamten Weges mit gleichbleibender Geschwindigkeit geht?

Aufgabe 230722:

Es sei $ABCD$ ein Rechteck; der Mittelpunkt der Diagonale AC sei M. Die Mittelsenkrechte auf AC schneide die Gerade durch A und B in E und die Gerade durch C und D in F.

Beweise, daß dann die Dreiecke AEM und CFM kongruent sind!

Aufgabe 230723:

Blaue, gelbe und rote Würfel sollen in eine Reihe gelegt werden. Der erste Würfel der Reihe soll blau, der zweite soll gelb sein. In der Reihe sollen niemals zwei gleichfarbige Würfel nebeneinander liegen, und es soll sich auch die Farbfolge von zwei nebeneinanderliegenden Würfeln niemals wiederholen.

Ermittle die größtmögliche Anzahl der Würfel in einer Reihe, die alle diese Bedingungen erfüllt!

Gib mindestens ein Beispiel für eine solche Reihe mit der größtmöglichen Anzahl von Würfeln an und weise nach, daß es keine solche Reihe mit mehr Würfeln geben kann!

Aufgabe 230724:

Von einem Parallelogramm $ABCD$ wird vorausgesetzt, daß die Halbierenden der Winkel $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle ABC$ einander in einem Punkt E schneiden, der auf der Strecke CD zwischen C und D liegt. Ferner wird vorausgesetzt, daß die Strecken AE und BE die Längen 7 cm bzw. 5 cm haben.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$!

23. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 230721:

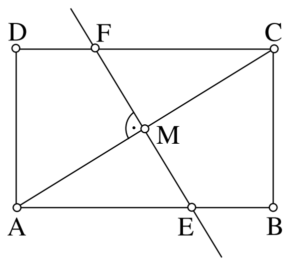
Wenn der Weg bis zum Rathaus genau $\frac{1}{4}$ des Gesamtweges und der Weg bis zum Bahnhof genau $\frac{1}{3}$ des Gesamtweges ist, dann ist der Weg vom Rathaus bis zum Bahnhof (wegen $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$) genau $\frac{1}{12}$ des Gesamtweges.

Wenn der Weg bis zum Bahnhof genau $\frac{1}{3}$ des Gesamtweges ist, dann ist der Weg vom Bahnhof bis zur Schule genau $\frac{2}{3}$ (oder $\frac{8}{12}$) des Gesamtweges.

Da Uwe für $\frac{1}{12}$ des Gesamtweges genau 2 Minuten benötigte, benötigte er für $\frac{8}{12}$ des Gesamtweges genau 16 Minuten. Da Uwe um 7.32 Uhr am Bahnhof war, trifft er folglich um 7.48 Uhr in der Schule ein.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 230722:



Es gilt:

(1) $\overline{AM} = \overline{MC}$; denn M ist laut Voraussetzung der Mittelpunkt der Strecke AC.

(2) $\overline{\sphericalangle FMC} = \overline{\sphericalangle AME} = 90°$; denn die Gerade durch F und E ist laut Voraussetzung die Mittelsenkrechte der Strecke AC und steht somit senkrecht auf AC.

(3) $AB \parallel CD$; da $ABCD$ laut Voraussetzung ein Rechteck ist.

(4) $\overline{\sphericalangle MAE} = \overline{\sphericalangle MCF}$; da diese Winkel Wechselwinkel sind, die wegen (3) an geschnittenen Parallelen liegen.

Aus (1), (2) und (4) folgt nach dem Kongruenzsatz wsw, daß die Dreiecke AEM und CEM kongruent sind. $\square$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 230723:

I) Bezeichnet man mit b, g bzw. r einen blauen, gelben bzw. roten Würfel, dann zeigen folgende Beispiele, daß es Reihen mit 7 Würfeln gibt, die alle gestellten Bedingungen erfüllen:

$$b,\ g,\ b,\ r,\ g,\ r,\ b;$$
$$b,\ g,\ r,\ b,\ r,\ g,\ b;$$
$$b,\ g,\ r,\ g,\ b,\ r,\ b;$$

II) Ist w_1, w_2, w_3,...,w_8,... eine Reihe von 8 oder mehr Würfeln, so kommen darin die 7 Farbfolgen (w_1, w_2), (w_2, w_3),... (w_7, w_8) vor. Zu den drei verschiedenen Farben b, g, r gibt es aber nur die folgenden 6 verschiedenen Farbfolgen (b, g), (b, r), (g, b), (g, r), (r, b), (r, g). Daraus folgt, daß bei einer Reihe von 8 oder mehr Würfeln (ohne benachbarte gleichfarbige Würfel) mindestens eine Farbfolge doppelt auftreten müßte, was der gestellten Bedingung widerspricht.

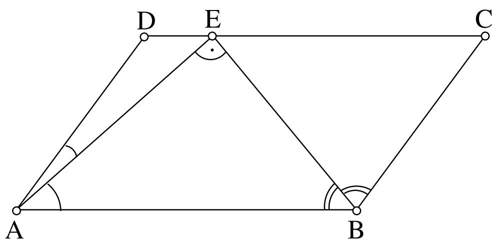
Aus I) und II) folgt, daß 7 die größtmögliche Anzahl der Würfel in einer Reihe der verlangten Art ist.

Hinweis: Man kann auch durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle zur Lösung gelangen. Dabei ist der Nachweis erforderlich, daß tatsächlich alle Fälle untersucht wurden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 230724:

Das Dreieck ABE und das Parallelogramm $ABCD$ stimmen in der Seite AB und in der zugehörigen Höhe überein. Deshalb ist der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$ doppelt so groß wie der des Dreiecks ABE.



Da im Parallelogramm die Summe der Größen benachbarter Winkel 180° beträgt, ist die Summe der Winkel $\sphericalangle EAB$ und $\sphericalangle ABE$ gleich 90°, das Dreieck ABE ist also rechtwinklig mit E als Scheitel des rechten Winkels.

Folglich beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ABE wegen $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 = 17,5$ mithin $17,5\,\text{cm}^2$ und der des Parallelogramms $ABCD$ daher $35\,\text{cm}^2$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission