# 24. Mathematik Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 6
# Saison 1984/1985

Aufgaben und Lösungen

# 24. Mathematik-Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 6
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

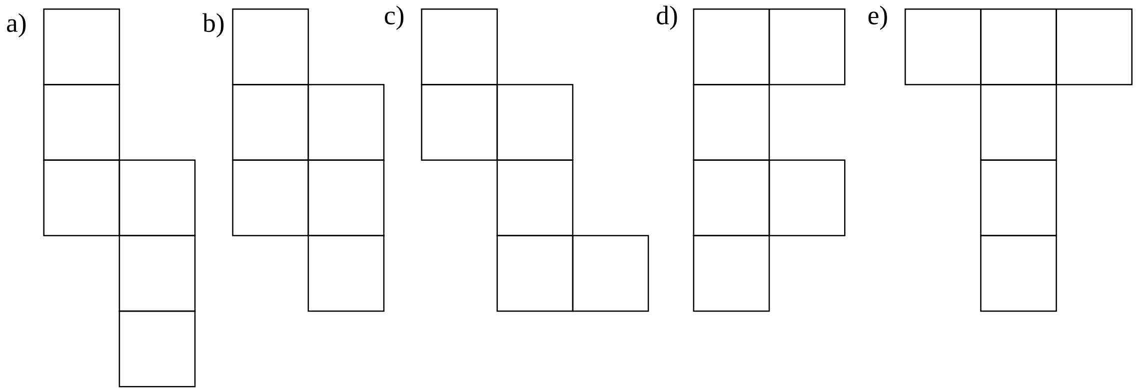
Aufgabe 240611:

Zum Pioniergeburtstag sollen die tüchtigsten Altstoffsammler ausgezeichnet werden. Hierzu will die Pionierleiterin Bücher zu je 6 M und zu je 4 M kaufen, von jeder Sorte mindestens eins, andere Sorten aber nicht. Insgesamt will sie 30 M für diese Bücher ausgeben.

Gib alle Möglichkeiten an, welche Anzahlen von Büchern der beiden Sorten gewählt werden können, um diesen Bedingungen zu entsprechen!

Aufgabe 240612:

Michael zeichnet fünf verschiedene Bilder: Bild a) bis e). Er behauptet, daß es Körpernetze von Würfeln seien.

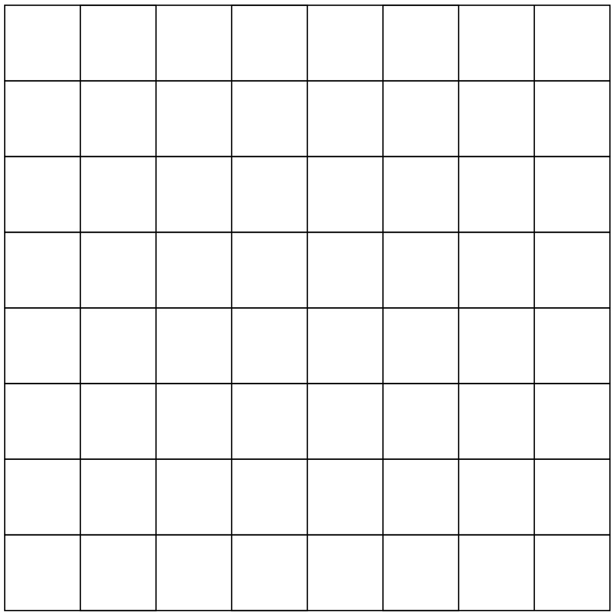



(1) Gib alle diejenigen unter den Bildern a) bis e) an, für die Michaels Behauptung wahr ist! (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

(2) Zeige, daß es möglich ist, aus einem quadratischen Gitternetz von 8 cm Seitenlänge, wie es Bild f) darstellt, neun Würfelnetze der in Aufgabe (1) gefundenen Art auszuschneiden! Es soll erlaubt sein, die Würfelnetze unverändert oder umgeklappt (spiegelbildlich) zu erhalten. Jedes in (1) gefundene Würfelnetz soll mindestens einmal vorkommen. Die Seitenlänge der einzelnen Quadrate in (1) soll dieselbe sein wie in (2), also 1 cm.

Zeichne derartige neun Würfelnetze in ein Gitternetz ein! Wieviele Felder des Gitternetzes werden dabei nicht benötigt?

f)



Aufgabe 240613:

Wenn man einen Würfel auf einen Tisch stellt, so daß er nirgends seitlich über die Tischplatte hinausragt, so sind von seinen sechs Flächen genau fünf sichtbar. Ebenso kann man einen kleineren Würfel so auf einen größeren stellen, daß von den sechs Flächen des kleineren Würfels genau fünf sichtbar sind, während die sechste vollständig auf dem größeren Würfel aufliegt, ohne seitlich über ihn hinauszuragen.

In dieser Art sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20$ cm, $a_2 = 10$ cm, $a_3 = 4$ cm der Größe nach so übereinander gestellt werden, daß der größte Würfel zuunterst auf der Tischplatte steht.

Wie groß ist dann die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile der drei Würfel?

Aufgabe 240614:

Rita multipliziert eine Zahl $z$ mit 9 und erhält als Ergebnis 111 111 111.

(a) Um welche Zahl $z$ handelt es sich?

(b) Ermittle eine Zahl $x$, die folgende Eigenschaft besitzt!

Wenn man $x$ mit der in (a) ermittelten Zahl $z$ multipliziert, dann erhält man als Produkt eine Zahl, die mit lauter Ziffern 8 (in normaler Schreibweise des Zehnersystems) geschrieben wird.

(c) Gibt es außer der in (b) ermittelten Zahl $x$ noch weitere Zahlen, die ebenfalls diese Eigenschaft besitzen?

Wenn dies der Fall ist, so ermittle eine weitere solche Zahl!

# 24. Mathematik-Olympiade
## 1. Stufe (Schulolympiade)
## Klasse 6
## Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 240611:

Werden $x$ Bücher zu je 6 M und $y$ Bücher zu je 4 M gekauft, so gilt

$$6x + 4y = 30. \tag{1}$$

Wegen $y \geq 1$ folgt hieraus $6x \leq 26$, also muß $x < 5$ sein. Daher und wegen $x \geq 1$ gibt es für $x$ nur die Möglichkeiten der folgenden Tabelle. Von diesen scheiden diejenigen aus, bei denen die Zahl $30 - 6x$ nicht durch 4 teilbar ist, da aus (1) folgt, daß $4y = 30 - 6x$ gelten muß. Bei den übrigen Werten von $x$ ergeben sich aus dieser Gleichung die angegebenen Werte für $y$.

| $x$ | $6x$ | $30 - 6x = 4y$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 24 | 6 |
| 2 | 12 | 18 | - |
| 3 | 18 | 12 | 3 |
| 4 | 24 | 6 | - |

Daher können nur die folgenden Anzahlen den Bedingungen der Aufgabe entsprechen:

Es werden

entweder 1 Buch zu 6 M und 6 Bücher zu 4 M
oder 3 Bücher zu 6 M und 3 Bücher zu 4 M

gekauft.

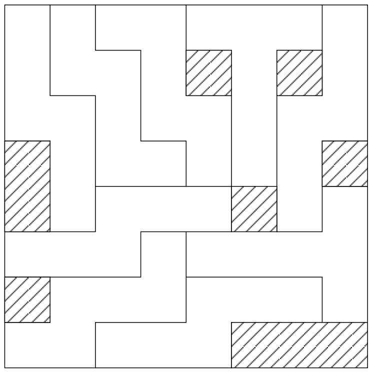
Beide Anzahlangaben erfüllen die Bedingungen (1) und $x \geq 1$, $y \geq 1$. Daher sind hiermit alle gesuchten Möglichkeiten genannt.

*Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (31)*

Lösung 240612:

(1) Genau die Bilder a), c) und e) sind Würfelnetze.

(2) Eine mögliche Anordnung von neun Würfelnetzen der geforderten Art zeigt die Abbildung. Zehn Felder des Gitternetzes werden nicht benötigt.



*Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (31)*

Lösung 240613:
Sichtbar sind von jedem der drei Würfel erstens die vier Seitenflächen (der Mantel). Sie haben die Flächeninhalte

$$A_1 = 4 \cdot a_1^2 = 1\,600\ \mathrm{cm}^2, \qquad A_2 = 4 \cdot a_2^2 = 400\ \mathrm{cm}^2, \qquad A_3 = 4 \cdot a_3^2 = 64\ \mathrm{cm}^2$$

Sichtbare Flächenteile sind zweitens Teile der Deckflächen der drei Würfel. Die Flächeninhalte dieser Flächenteile ergeben zusammen den Flächeninhalt der Deckfläche des größten Würfels[1)], also

$$A_D = a_1^2 = 400\ \mathrm{cm}^2.$$

Weitere sichtbare Flächenteile kommen nicht vor[1)]. Für die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile gilt daher

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_D = 2\,464\ \mathrm{cm}^2.$$

[1)] Es wird akzeptiert, diese Feststellungen der Anschauung zu entnehmen.

*Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (31)*

Lösung 240614:

(a) Wegen $111\,111\,111 : 9 = 12\,345\,679$ ist $z = 12\,345\,679$ die Zahl, die mit 9 multipliziert $111\,111\,111$ ergibt.

(b) Aus

$$12\,345\,679 \cdot 9 = 111\,111\,111$$

folgt

$$12\,345\,679 \cdot 72 = 888\,888\,888 \tag{1}$$

Daher hat beispielsweise die Zahl $x = 72$ die verlangte Eigenschaft, daß die Zahl $z \cdot x$ mit lauter Ziffern 8 geschrieben wird.

(c) Aus (1) folgt[1)]

$$12\,345\,679 \cdot 72 \cdot 1\,000\,000\,001 = 888\,888\,888 \cdot 1\,000\,000\,001, \tag{2}$$

d.h.

$$12\,345\,679 \cdot 72\,000\,000\,072 = 888\,888\,888\,888\,888\,888. \tag{3}$$

Also hat (beispielsweise) auch die Zahl $72\,000\,000\,072$ die verlangte Eigenschaft.

[1)] Man kann auch (2) durch unmittelbares Ausrechnen gewinnen, ohne (1) heranzuziehen (ähnlich auch (1) ohne Zurückführung auf (a)).

*Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (31)*

# Quellenverzeichnis

**(31)** Broschüre vom Volk und Wissen Verlag (VWV)