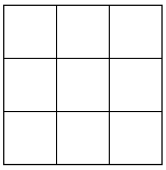
25. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Saison 1985/1986

Aufgaben und Lösungen

25. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250521:



In einem (3×3)-Felderbrett (siehe Abbildung) sind genau neun Quadrate enthalten, die aus einem Feld bestehen (□), außerdem genau vier Quadrate, die aus vier Feldern bestehen (⊞), und genau ein Quadrat, das aus neun Feldern besteht. Insgesamt sind in dem (3×3)-Felderbrett also 14 Quadrate enthalten.

Beantworte folgende Fragen:

a) Wieviel Quadrate sind insgesamt in einem (4×4)-Felderbrett enthalten?

b) Wieviel Quadrate sind insgesamt in einem (5×5)-Felderbrett enthalten?

c) Wieviel Quadrate sind insgesamt in einem (6×6)-Felderbrett enthalten?

Eine Begründung der Antworten wird nicht verlangt.

Aufgabe 250522:

Vom Bahnhof Mathestädt fährt zu jeder vollen Viertelstunde ein Bus ab und trifft nach 2 Stunden in Knobelhausen ein. Von dort fahren ebenfalls im Viertelstundenabstand Busse auf derselben Straße nach Mathestädt, wo sie nach 2 Stunden Fahrzeit eintreffen. Morgens fährt der erste Bus von Mathestädt um 5.00 Uhr und der erste Bus von Knobelhausen um 7.10 Uhr ab. Die Busfahrer begrüßen einander jedesmal mit Kopfnicken, wenn sie sich unterwegs begegnen.

Wie viele ihm entgegenkommende Kollegen begrüßt der Busfahrer Franz Freundlich auf einer Fahrt von Mathestädt nach Knobelhausen, wenn diese Fahrt um 10.00 Uhr beginnt?

Aufgabe 250523:

Auf die Randlinie eines Quadrates sollen zwölf Damesteine so verteilt werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Auf jeder Ecke des Quadrates liegen gleich viele Damesteine. Dabei ist es zulässig, daß die Ecken frei von Damesteinen sind; es dürfen aber auch mehrere Damesteine übereinander auf den Ecken liegen.

(2) Auf jeder Seite des Quadrates (einschließlich ihrer beiden Eckpunkte) sind gleich viele Damesteine. Dabei sollen alle Damesteine, die auf einer Quadratseite, aber zwischen deren Eckpunkten liegen, übereinander gestapelt sein.

a) Gib vier verschiedene Verteilungen der zwölf Damesteine an, so daß jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1) und (2) erfüllt!

b) Begründe, daß es nicht mehr als vier verschiedene Verteilungen dieser Art geben kann!

Aufgabe 250524:

Zeichne ein Quadrat $A'B'C'D'$ mit $\overline{A'B'} = 5,0\,\text{cm}$! Zeichne dann einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$, der $6,5\,\text{cm}$ lang ist und parallel zur Geraden durch B' und D' in Richtung von B' nach D' verläuft!

Es soll nun zum Bild $A'B'C'D'$ bei dieser Verschiebung das Original $ABCD$ ermittelt werden. Bei der Lösung dieser Aufgabe darf die mm-Skala des Lineals nicht mehr verwendet werden.

a) Löse die genannte Aufgabe so, daß außer Zirkel und Lineal auch das Zeichendreieck zum Ziehen von Parallelen durch die Punkte A', B', C' und D' benutzt wird!

b) Löse (in einer neuen Zeichnung) die Aufgabe nur mit Zirkel und Lineal und so, daß weder die Gerade durch A und A' noch die Gerade durch C und C' gezeichnet wird!

Eine Begründung und Konstruktionsbeschreibungen werden nicht verlangt.

25. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 250521:

a) In einem (4×4)-Felderbrett sind insgesamt $16 + 9 + 4 + 1 = 30$ Quadrate enthalten.

b) In einem (5×5)-Felderbrett sind insgesamt $25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$ Quadrate enthalten.

c) In einem (8×8)-Felderbrett sind insgesamt $64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$ Quadrate enthalten.

Hinweis zur Korrektur: Die angedeuteten Rechenwege werden vom Schüler nicht verlangt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 250522:

Als ersten begrüßt Franz Freundlich denjenigen Kollegen, der als erster nach 8.00 Uhr in Knobelhausen abgefahren ist; als letzten denjenigen, der als letzter vor 12.00 Uhr in Knobelhausen abfährt. Also begrüßt er alle diejenigen Kollegen, die zu einer der folgenden Zeiten in Knobelhausen abfahren:

8.10 Uhr,	8.25 Uhr,	8.40 Uhr,	8.55 Uhr,
9.10 Uhr,	9.25 Uhr,	9.40 Uhr,	9.55 Uhr,
10.10 Uhr,	10.25 Uhr,	10.40 Uhr,	10.55 Uhr,
11.10 Uhr,	11.25 Uhr,	11.40 Uhr,	11.55 Uhr.

Das sind insgesamt 16 Kollegen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 250523:

a) Die folgenden Verteilungen erfüllen die Bedingungen (1) und (2):

```
0 3 0    1 2 1    2 1 2    3 0 3
3   3    2   2    1   1    0   0
0 3 0    1 2 1    2 1 2    3 0 3
```

b) Für jede Verteilung der geforderten Art gilt: Wenn auf einer Ecke genau x Damesteine liegen, dann nach (1) auf jeder Ecke. Wenn ferner auf einer Seite außer den $2 \cdot x$ Damesteinen, die auf beiden Endpunkten liegen, noch genau y Damesteine vorhanden sind, dann gilt das nach (2) auf jeder Seite mit derselben Anzahl y.

Daher sind insgesamt $4 \cdot x + 4 \cdot y$ Damesteine verteilt, also ist

$$\begin{aligned} 4 \cdot x + 4 \cdot y &= 12, \\ 4 \cdot (x + y) &= 12, \\ x + y &= 3. \end{aligned}$$

Dies kann aber mit den Anzahlen x und y nur durch

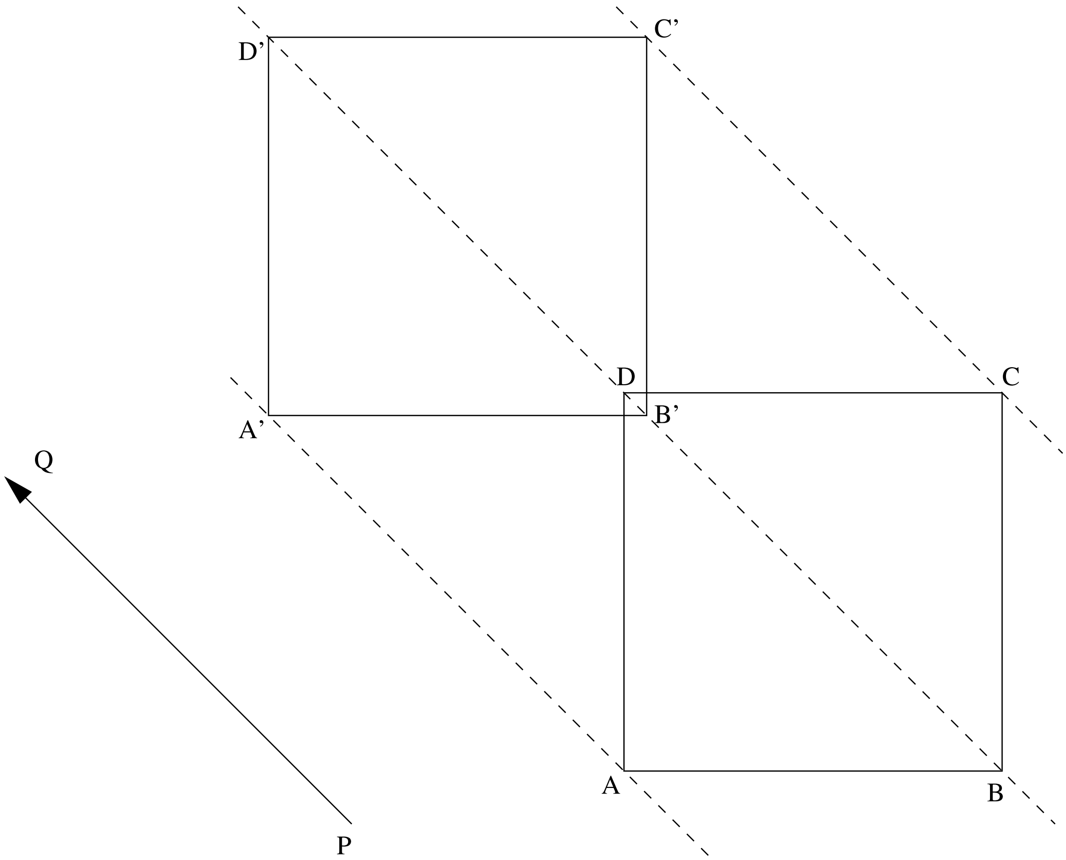
$0 + 3 = 3$, $1 + 2 = 3$, $2 + 1 = 3$ oder $3 + 0 = 3$

erfüllt werden. Daher kann es nur die vier in a) genannten Verteilungen geben.

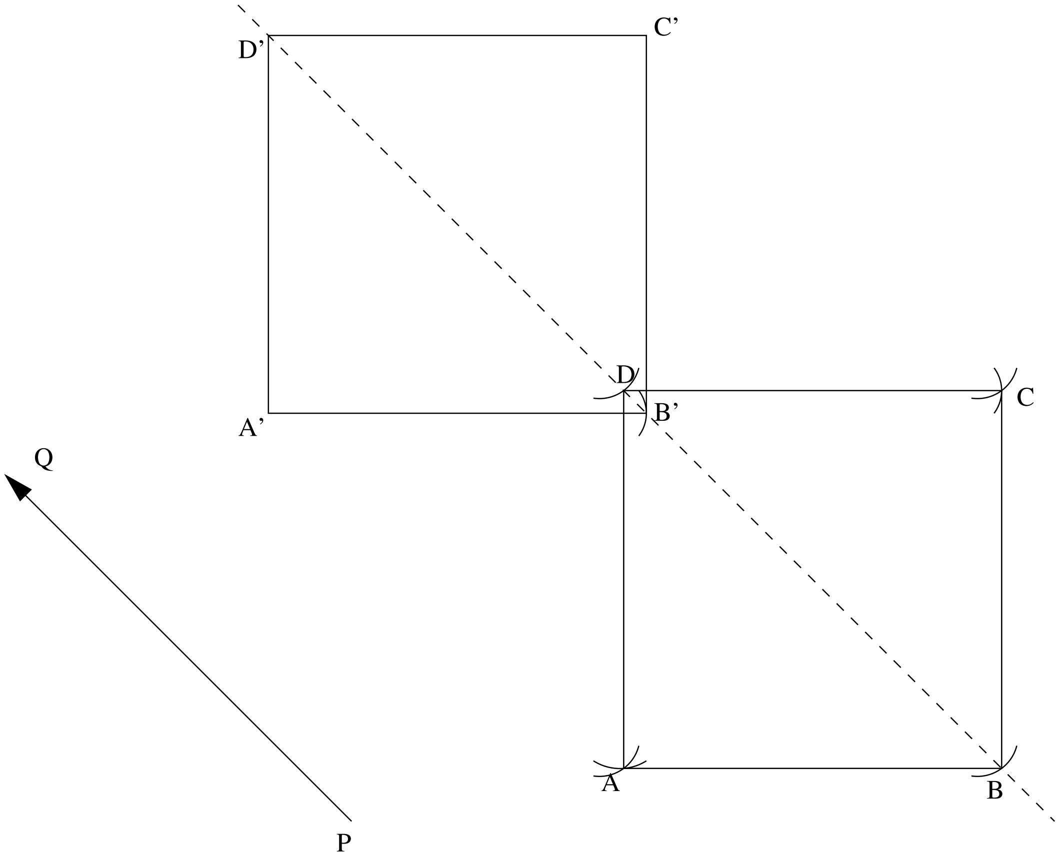
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 250524:

a)



b)



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission