25. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1985/1986

Aufgaben und Lösungen

25. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250721:

Annett, Birgit und Cornelia haben in der letzten Klassenarbeit unterschiedliche Leistungen gezeigt; denn eine dieser Schülerinnen erhielt die Note 1, eine andere die Note 2 und die dritte die Note 3.

Kerstin, eine Klassenkameradin, erzählt zu Hause: "Annett hat keine 1, Birgit keine 2, aber Cornelia hat eine 2."

Es stellt sich jedoch heraus, daß sich Kerstin bei genau zwei dieser drei Aussagen geirrt hatte.

Kann man aus diesen Angaben die Noten der einzelnen Schülerinnen eindeutig ermitteln? Ist dies der Fall, so gib die Notenverteilung an!

Aufgabe 250722:

Ein Quader habe das Volumen $V_1 = 0,216\,\mathrm{dm}^3$, die Kanten seiner Grundfläche seien $12\,\mathrm{cm}$ bzw. $60\,\mathrm{mm}$ lang.

Von einem zweiten Quader sei bekannt, daß er die gleiche Höhe wie der erste Quader hat und daß die längere Kante seiner Grundfläche noch um $2\,\mathrm{cm}$ länger ist als die längere Kante der Grundfläche des ersten Quaders und die kürzere noch um $10\,\mathrm{mm}$ kürzer ist als die kürzere des ersten Quaders.

Berechne die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Quader und gib sie in Quadratzentimetern an!

Aufgabe 250723:

Es sei ABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BAC = \alpha > 90°$.

Ferner sei H der Schnittpunkt der Geraden, auf denen die Höhen dieses Dreiecks liegen.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets $\sphericalangle BHC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB$ gilt!

Aufgabe 250724:

a) Gegeben seien die drei Ziffern 2, 7 und 9. Aus ihnen sollen alle diejenigen dreistelligen Zahlen gebildet werden, die jede dieser drei Ziffern genau einmal enthalten.

   Zeige, daß die Summe aus allen diesen dreistelligen Zahlen durch 111 teilbar ist!

b) Gegeben sind drei paarweise verschiedene Ziffern, von denen keine die Ziffer 0 ist.

   Beweise, daß die Summe aus allen denjenigen dreistelligen Zahlen, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten, stets durch 111 teilbar ist!

25. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 250721:

Wäre Kerstins erste und zweite Aussage falsch und die dritte wahr, hätten Birgit und Cornelia eine 2, was der Voraussetzung widerspricht, daß die drei Schülerinnen unterschiedliche Noten haben.

Wäre Kerstins erste und dritte Aussage falsch und die zweite wahr, dann hätte Annett eine 1, Birgit und Cornelia keine 2, was der Voraussetzung widerspricht, daß die Note 2 erteilt wurde.

Damit bleibt nur noch die Möglichkeit: Kerstins zweite und dritte Aussagen sind falsch, und die erste Aussage ist wahr. Das führt auf die Notenverteilung: Birgit 2, Annett (daher keine 2 und auch) keine 1, also Annett 3; und folglich Cornelia 1. Damit sind die Noten eindeutig ermittelt.

Anderer Lösungsweg:

Man notiert alle möglichen Notenverteilungen und prüft in jedem Falle, welche der Aussagen von Kerstin wahr (w) und welche falsch (f) sind.

Note	Annett	1	1	2	2	3	3
	Birgit	2	3	1	3	1	2
	Cornelia	3	2	3	1	2	1
Aussage	(1)	f	f	w	w	w	w
	(2)	f	w	w	w	w	f
	(3)	f	w	f	f	w	f

Nur in der letzten Spalte sind genau zwei Aussagen von Kerstin falsch, also ist eindeutig ermittelt, daß nur diese Verteilung den Angaben entspricht.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 250722:

Für den ersten Quader gilt:

Seine längere Grundkante beträgt $a_1 = 12\,\text{cm}$, seine kürzere Grundkante $b_1 = 6\,\text{cm}$. Sein Volumen ist $V_1 = 216\,\text{cm}^3$; wegen $216 : (12 \cdot 6) = 3$ beträgt seine Höhe daher $h_1 = 3\,\text{cm}$.

Für den zweiten Quader gilt:

Seine längere Grundkante beträgt $a_2 = 14\,\text{cm}$, seine kürzere Grundkante $b_2 = 5\,\text{cm}$ und seine Höhe $h_2 = h_1 = 3\,\text{cm}$.

Der Oberflächeninhalt des ersten Quaders beträgt somit

$$A_1 = 2 \cdot (12 \cdot 6\,\mathrm{cm}^2 + 12 \cdot 3\,\mathrm{cm}^2 + 3 \cdot 6\,\mathrm{cm}^2) = 252\,\mathrm{cm}^2.$$

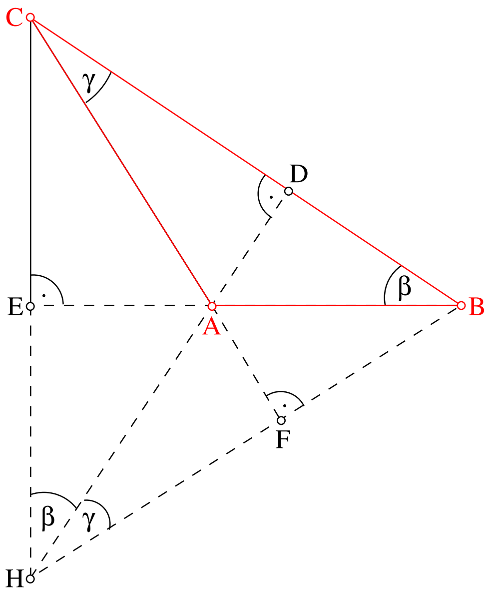
Der Oberflächeninhalt des zweiten Quaders beträgt

$$A_2 = 2 \cdot (14 \cdot 5\,\mathrm{cm}^2 + 14 \cdot 3\,\mathrm{cm}^2 + 5 \cdot 3\,\mathrm{cm}^2) = 254\,\mathrm{cm}^2.$$

Die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Quader beträgt somit $2\,\mathrm{cm}^2$.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 250723:



Es seien D, E bzw. F die Fußpunkte der zu A, B bzw. C gehörenden Höhen, ferner sei

$$\overline{\sphericalangle ABC} = \beta, \qquad \overline{\sphericalangle ACB} = \gamma.$$

Da das Dreieck ABC bei A stumpfwinklig ist, also bei B und C spitze Innenwinkel hat, liegt D auf der Seite BC, während E, F und H außerhalb des Dreiecks liegen (siehe Abbildung).

Hiernach gilt in den Dreiecken ΔBDH und ΔCFB

$$\overline{\sphericalangle HBD} = \overline{\sphericalangle FBC}.$$

Ferner ist, da D und F Höhenfußpunkte sind,
$\overline{\sphericalangle CDH} = \overline{\sphericalangle CFB} = 90°$.
Folglich stimmen die Dreiecke CDH und CFB in zwei Innenwinkeln überein; nach dem Innenwinkelsatz gilt daher auch

$$\overline{\sphericalangle DHB} = \overline{\sphericalangle FCB} = \gamma. \tag{1}$$

Analog beweist man durch Betrachtung der Dreiecke CDH und BEC

$$\overline{\sphericalangle DHC} = \overline{\sphericalangle EBC} = \beta \tag{2}$$

Schließlich gilt wegen der Lage von D zwischen B und C die Gleichung $\overline{\sphericalangle BHC} = \overline{\sphericalangle DHC} + \overline{\sphericalangle DHB} = \beta + \gamma$.
□

Anderer Lösungsweg:

Wegen der Lage von E, F und H ist

$$\overline{\sphericalangle BHC} = \overline{\sphericalangle EHF} \tag{3}$$

eine Innenwinkelgröße im Viereck $AEFH$. Dieses Viereck hat bei E und F rechte Winkel. Aus dem Satz über die Winkelsumme im Viereck folgt daher

$$\overline{\sphericalangle EHF} = 180° - \overline{\sphericalangle EAF}. \tag{4}$$

Ferner ist $\sphericalangle EAF$ Scheitelwinkel zu $\sphericalangle BAC$, also ebenso groß wie dieser. Hieraus und aus dem Innenwinkelsatz für das Dreieck ABC folgt weiter

$$180° - \overline{\sphericalangle EAF} = 180° - \overline{\sphericalangle BAC} = \beta + \gamma. \tag{5}$$

Aus (3), (4), (5) ergibt sich $\overline{\sphericalangle BHC} = \beta + \gamma$. □

Hinweis zur Korrektur: Die benötigten Lageaussagen kann der Schüler einer (genügend genau gezeichneten) Abbildung entnehmen; ein Beweis solcher Aussagen wird nicht verlangt, sie sind aber für die betreffenden Beweisstellen zu vermerken.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 250724:

a) Aus den Ziffern 2, 7, 9 lassen sich genau die folgenden sechs dreistelligen Zahlen bilden, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten:

279, 297, 729, 792, 927, 972.

Die Summe dieser sechs Zahlen beträgt 3996. Wegen $3996 = 36 \cdot 111$ ist diese Summe durch 111 teilbar.

b) Es seien a, b, c drei paarweise verschiedene Ziffern, unter denen sich nicht die Ziffer 0 befindet. Dann lassen sich genau die folgenden sechs dreistelligen Zahlen bilden, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten:

$100a + 10b + c$, $100a + 10c + b$, $100b + 10a + c$,
$100b + 10c + a$, $100c + 10a + b$, $100c + 10b + a$.

Die Summe dieser sechs Zahlen beträgt

$$222a + 222b + 222c. \tag{1}$$

Wegen $222 = 2 \cdot 111$ ist jede der drei Zahlen $222a$, $222b$, $222c$ durch 111 teilbar, mithin auch ihre in (1) genannte Summe. □

Hinweis: Man kann auch zuerst Aufgabe b) lösen. Als Beweis für die in a) zu zeigende Aussage genügt dann die Feststellung, daß sie als Spezialfall in der bei b) bewiesenen Aussage enthalten ist.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission