26. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Saison 1986/1987

Aufgaben und Lösungen

26. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260811:

In das nachstehende Kryptogramm sind für die Buchstaben die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

$$\begin{array}{cccccccccc}
A & B & C & - & D & B & = & E & C & C \\
 & : & & & & - & & & - & \\
 & F & G & \cdot & C & H & = & D & I & H \\
\hline
 & K & C & + & C & K & = & & D & D
\end{array}$$

a) Gib eine Eintragung an und zeige, daß sie den oben angegebenen Bedingungen genügt!

b) Untersuche, ob es außer der von dir gefundenen Eintragung weitere Möglichkeiten gibt. ist dies der Fall, dann ermittle alle Eintragungen, die den Bedingungen genügen!

Aufgabe 260812:

Uwe möchte mit einem Taschenrechner feststellen, ob 37 ein Teiler von 45 679 091 ist. Wenn er dabei den Rechner SR1 verwendet, könnte er folgendermaßen vorgehen: Er dividiert 45 679 091 durch 37. Der Rechner SR1 zeigt 1 234 570 an, also ein ganzzahliges Ergebnis. Zur Kontrolle multipliziert Uwe dieses Ergebnis, ohne es neu einzutippen, wieder mit 37. Der Rechner zeigt als Ergebnis wieder 45 679 091 an. (Du kannst dies mit einem SR1 selbst ausprobieren.)

Kann Uwe nun schließen, daß 37 ein Teiler von 45 679 091 ist?

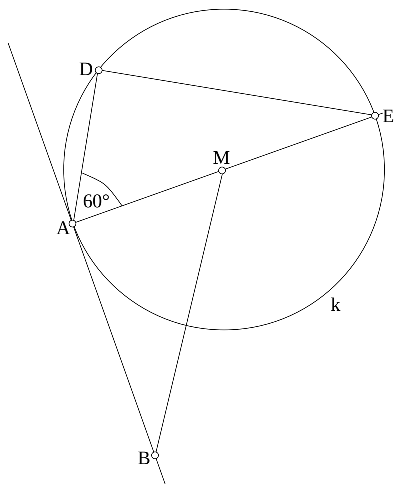
Aufgabe 260813:

Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Vier Punkte A, C, E und D seien in dieser Reihenfolge auf k so gelegen, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind (siehe Bild):

(1) A, M und E liegen auf ein und derselben Geraden.

(2) Es gilt $\sphericalangle MAD = 60°$.

(3) Die Gerade durch M und C schneide die in A an k gelegte Tangente in einem Punkt B derart, daß $\overline{MC} = \overline{BC}$ gilt.



Untersuche, ob unter diesen Voraussetzungen die Strecken AB und DE die gleiche Länge haben!

Aufgabe 260814:

Es sei $ABCDEF$ ein gerades dreiseitiges Prisma. Alle drei Seitenflächen $ABED$, $BCFE$, $CADF$ sowie die Grund- und die Deckfläche ABC bzw. DEF seien sämtlich einander umfangsgleich. Gegeben sei die Länge h der Strecke AD.

Ermittle in Abhängigkeit von h die Längen der Strecken BC, CA und AB!

26. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 260811:

Um eine in (a) geforderte Eintragung (siehe unten) zu finden, kann man mit Überlegungen zu Aufgabe b) beginnen, indem man folgende Schlüsse zieht: Wenn eine Eintragung allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, so folgt: Nach der Gleichung in der 1. Zeile hat die Summe aus der Einerziffer C der rechten Seite und der Einerziffer B wieder die Einerziffer C. Daher muss

$$B = 0$$

sein. Danach folgt durch Betrachtung der Zehnerziffern weiter

$$C + D = 10.$$

Aus der 2. Spalte folgt $K + H = 10$ und dann weiter $2C + 1 = D$. Setzt man dies in $C + D = 10$ ein, so ergibt sich $3C + 1 = 10$, also

$$C = 3.$$

und damit

$$D = 7.$$

Hiernach ergibt sich aus der 3. Zeile	K	$=$	4
und damit (wegen $K + H = 10$)	H	$=$	$6.$
Aus der 3. Spalte folgt nun	I	$=$	$5, E = 8$
und damit aus der 1. Zeile	A	$=$	9
und aus der 1. Spalte	F	$=$	$2, G = 1.$

Als Eintragung, die zu a) anzugeben ist, wurde so

```
903 - 70 = 833
 :     -    -
 21 * 36 = 756
--------------
 43 + 34 =  77
```

gefunden, und als Antwort zu b) hat sich ergeben, dass es keine anderen Möglichkeiten geben kann, die Bedingungen zu erfüllen. Zur vollständigen Bearbeitung der Aufgabe a) ist dann noch festzustellen, daß die gefundene Eintragung für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern verwendet und daß bei dieser Eintragung alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gelöst sind. Daher erfüllt genau die angegebene Eintragung alle geforderten Bedingungen.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 260812:

Nein, der Schluß ist nicht möglich. Obwohl nämlich der SR1 für $z = 45679091 : 37$ das gerundete Ergebnis 1234570 anzeigte, hatte er dennoch einen genaueren Näherungswert gespeichert. Das kannst du feststellen, indem du nach folgendem Ablaufplan rechnest:

$$\boxed{45679091}\ \boxed{:}\ \boxed{37}\ \boxed{=}\ \text{Anzeige: } 1234570\ \boxed{-}\ \boxed{1234570}\ \boxed{=} \qquad (*)$$

Nun zeigt der Rechner nicht 0, sondern 0.03 als Ergebnis. Er hat also als Divisionsergebnis von $z = 45679091 : 37$ den Wert $1234570,03$ gespeichert.

Uwe hatte folgendermaßen gerechnet:

$$\boxed{45679091}\ \boxed{:}\ \boxed{37}\ \boxed{=}\ \text{Anzeige: } 1234570\ \boxed{\cdot}\ \boxed{37}\ \boxed{=} \qquad (**)$$

Das danach angezeigt Ergebnis 45679091 ist somit (näherungsweise) das Produkt aus dem gespeicherten Wert $1234570,03$ und 37; es ist nicht - wie Uwe gemeint hat - das Produkt aus dem angezeigten Wert 1234570 und 37. Deshalt ist Uwes Schlussweise falsch.

Weitere Hinweise: Um zu sehen, dass diese falsche Schlussweise hier auch tatsächlich zu einem falschen Ergebnis führt, gibt es mehrere Möglichkeiten:

A. Man kann sofort - ohne nochmalige Rechnerbenutzung - erkennen, dass $45679091 : 37$ nicht genau gleich 1234570 sein kann; denn $1234570 \cdot 37$ ist eine (ganze) Zahl mit der letzten Ziffer 0.

B. Man kann $45679091 : 37$ schriftlich berechnen und daraus entnehmen, dass das Ergebnis keine ganze Zahl ist.

C. Die richtige Antwort auf die Frage, ob 37 ein Teiler von 45679091 ist, kann man erhalten, indem man anstelle der Fortsetzung in (**), die Uwe zur Kontrolle gewählt hat, neu eintippt:

   $$\boxed{1234570}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{37}\ \boxed{=}$$

   Danach zeigt der Rechner 45679090 an. (Das ist in der Tat, wie in A bemerkt, eine ganze Zahl mit der letzten Ziffer 0. Da diese Rechnung (***) bei der Rechengenauigkeit des SR1 nicht nur einen Näherungswert, sondern das genaue Produkt liefert, folgt:

   Die Zahl 45679091 ist nicht durch 37 teilbar, sondern lässt bei Division durch 37 den Rest 1.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 260813:

Die Strecken AB und DE sind Seiten der Dreiecke MAB bzw. ADE. Kann man zeigen, dass diese beiden Dreiecke kongruent sind, so folgt $\overline{AB} = \overline{DE}$.

Der Radius von k sei r. Nach Voraussetzung (1) ist AE ein Durchmesser von k, also gilt $\overline{AE} = 2r$. Als Radius von k ist auch $\overline{MC} = r$. Nach (3) folgt hieraus $\overline{MB} = 2r$. Somit gilt

$$\overline{MB} = \overline{AE}. \qquad (4)$$

Nach dem Satz von Thales gilt $\overline{\sphericalangle ADE} = 90°$. Da die Tangente senkrecht auf dem Berührungsradius steht, gilt $\overline{\sphericalangle MAB} = 90°$, also ist

$$\overline{\sphericalangle MAB} = \overline{\sphericalangle ADE}. \qquad (5)$$

Da A und D auf k liegen, ist das Dreieck MAD gleichschenklig mit $\overline{MA} = \overline{MD}$. Für den Basiswinkel folgt aus (2) daher $\overline{\sphericalangle MDA} = \overline{\sphericalangle MAD} = 60°$, nach dem Innenwinkelsatz also $\overline{\sphericalangle AMD} = 60°$. Also ist das Dreieck MAD sogar gleichseitig, und es gilt

$$\overline{MA} = \overline{AD}. \qquad (6)$$

In den Dreiecken MAB bzw. ADE liegt der in (5) genannte Winkel als rechter Winkel der größten Seite gegenüber, die in (4) genannt ist. Nach dem Kongruenzsatz sSW folgt somit $\Delta MAB \cong \Delta ADE$ und damit $\overline{AB} = \overline{DE}$.

Anderer Lösungsweg: Wie oben zeigt man (4) und (5). Nach der Umkehrung des Thalessatzes liegt nun A auf dem Kreis mit dem Durchmesser BM, der nach (3) als Mittelpunkt C hat. Somit ist $\overline{CA} = \overline{CM} = \overline{AM}$, also das Dreieck ACM gleichseitig, und es folgt

$$\overline{\sphericalangle BMA} = \overline{\sphericalangle CMA} = 60°,$$

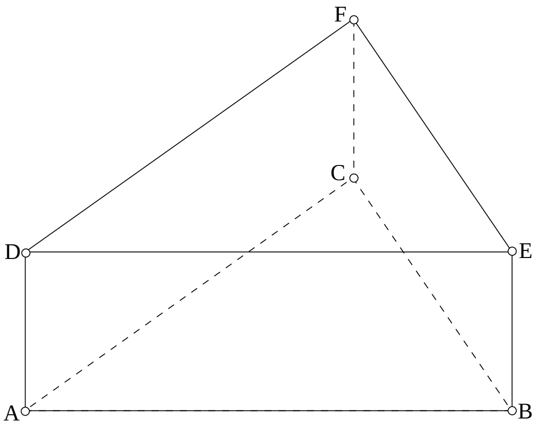
nach (2) also weiter

$$\overline{\sphericalangle BMA} = \overline{\sphericalangle MAD} = \overline{\sphericalangle EAD}. \qquad (7)$$

Aus (4), (5), (7) folgt nach dem Kongruenzsatz wws, daß $\Delta MAB \cong \Delta ADE$, also $\overline{AB} = \overline{DE}$ gilt.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 260814:



Die Seitenflächen des Prismas sind Rechtecke, haben also gleichlange Gegenseiten. Mithin gilt

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = h$$

sowie für die gesuchten Längen

$$a = \overline{BC} = \overline{EF},$$
$$b = \overline{CA} = \overline{FD}$$
$$c = \overline{AB} = \overline{DE}.$$

Aus der Umfangsgleichheit der Seitenflächen untereinander folgt somit

$$2a + 2h = 2b + 2h = 2c + 2h, \qquad (1)$$

und aus der Umfangsgleichheit der Seitenflächen mit der Grund- oder Deckfläche folgt

$$2a + 2h = a + b + c. \qquad (2)$$

Aus (1) ergibt sich damit $a = b = c$ und daher aus (2) $2a + 2h = 3h$, also $a = 2h$.

Die gesuchten Längen lauten mithin $\overline{BC} = \overline{CA} = \overline{AB} = 2h$.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission