



**26. Mathematik Olympiade**  
**3. Stufe (Bezirksolympiade)**  
**Klasse 8**  
**Saison 1986/1987**

Aufgaben und Lösungen





26. Mathematik-Olympiade  
3. Stufe (Bezirksolympiade)  
Klasse 8  
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 260831:

Gegen Ende eines Kinderfestes kommen fünf Mädchen zur Solidaritätstombola und wollen Lose kaufen. Der Pionierleiter zählt die vorrätigen Lose und sagt dann: "Der Vorrat reicht dafür, daß jede von euch, eine nach der anderen, jeweils genau die Hälfte der gerade noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kauft. Dann bleibt kein Los übrig."

- (I) Weise nach, daß es als Vorrat an Losen höchstens eine Anzahl geben kann, bei der die Aussagen des Pionierleiters zutreffen!
- (II) Weise nach, daß für diese Anzahl die Aussagen des Pionierleiters zutreffen! Wie viele Lose kann jedes der fünf Mädchen nach diesen Angaben kaufen?

Aufgabe 260832:

Ermittle alle diejenigen Paare  $(p; q)$  von Primzahlen, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

- (1) Die Differenz  $q - p$  ist größer als 0 und kleiner als 10.
- (2) Die Summe  $p + q$  ist das Quadrat einer natürlichen Zahl  $n$ .
- (3) Addiert man zu dieser Zahl  $n$  die Summe von  $p$  und  $q$ , so erhält man 42.

Aufgabe 260833:

Gegeben seien ein Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $r = 5$  cm sowie eine Gerade  $g$ , die von  $M$  den Abstand  $d = 6$  cm hat. Zu konstruieren sind alle diejenigen Punkte  $P$ , die die folgenden Bedingungen (a) und (b) erfüllen:

- (a) Der Punkt  $P$  liegt auf der Geraden  $g$ .
- (b) Die von  $P$  an  $k$  gelegten Tangenten bilden miteinander einen rechten Winkel.

Beschreibe eine Konstruktion! Fertige eine Konstruktionszeichnung an! Beweise die beiden folgenden Sätze (I) und (II)!

- (I) Wenn ein Punkt  $P$  die Bedingungen (a) und (b) erfüllt, dann läßt er sich nach der angegebenen Beschreibung konstruieren.
- (II) Wenn ein Punkt  $P$  nach der angegebenen Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt er die Bedingungen (a) und (b).



Aufgabe 260834:

In einer Ebene seien 100 verschiedene Punkte so gelegen, daß folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

- (1) Es gibt genau eine Gerade, auf der mehr als zwei der 100 Punkte liegen.
- (2) Auf dieser Geraden liegen genau drei der 100 Punkte.

Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Anzahl derjenigen Geraden, die durch mehr als einen der 100 Punkte gehen!

Aufgabe 260835:

Beweise folgende Sätze:

- I) Wenn  $ABC$  ein Dreieck mit  $\overline{AC} = \overline{BC}$  ist, dann ist die Seitenhalbierende von  $AB$  zugleich auch Winkelhalbierende von  $\sphericalangle ACB$ .
- II) Wenn in einem Dreieck  $ABC$  die Seitenhalbierende von  $AB$  zugleich auch Winkelhalbierende von  $\sphericalangle ACB$  ist dann gilt  $\overline{AC} = \overline{BC}$ .

Aufgabe 260836:

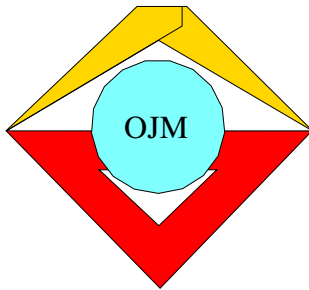
Es sei  $ABCD$  eine dreiseitige Pyramide, die die Bedingung erfüllt, daß die vier Dreiecke  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$  und  $BCD$  sämtlich einander umfangsgleich sind.

Untersuche, ob durch diese Bedingung und durch die Längen

$$\overline{AD} = p, \quad \overline{BD} = q, \quad \overline{CD} = r$$

die Längen  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{CA} = b$  und  $\overline{AB} = c$  eindeutig bestimmt sind!

Wenn dies der Fall ist, gib diese Längen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  in Abhängigkeit von  $p$ ,  $q$ ,  $r$  an!



26. Mathematik-Olympiade  
3. Stufe (Bezirksolympiade)  
Klasse 8  
Lösungen

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Lösung 260831:

- (I) Wenn die Aussagen des Pionierleiters bei einem Vorrat von  $x$  Losen zutreffen, so kann jedes der Mädchen so viele Lose kaufen, wie die folgende Tabelle angibt. Ferner ist dort angegeben, wie viele Lose dann jeweils noch vorhanden sind.

	Anzahl der Lose, die das Mädchen kaufen kann	Anzahl der Lose, die danach noch vorhanden sind
1. Mädchen	$\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$	$x - (\frac{x}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$
2. Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$	$(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}) - (\frac{x}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$
3. Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{4} - \frac{3}{4}) + \frac{1}{2} = \frac{x}{8} + \frac{1}{8}$	$(\frac{x}{4} - \frac{3}{4}) - (\frac{x}{8} + \frac{1}{8}) = \frac{x}{8} - \frac{7}{8}$
4. Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{8} - \frac{7}{8}) + \frac{1}{2} = \frac{x}{16} + \frac{1}{16}$	$(\frac{x}{8} - \frac{7}{8}) - (\frac{x}{16} + \frac{1}{16}) = \frac{x}{16} - \frac{15}{16}$
5. Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{16} - \frac{15}{16}) + \frac{1}{2} = \frac{x}{32} + \frac{1}{32}$	

Da das 5. Mädchen alle noch vorhandenen Lose gekauft hat, gilt

$$\frac{x}{32} + \frac{1}{32} = \frac{x}{16} - \frac{15}{16}$$

also  $x + 1 = 2x - 30$

und daher  $x = 31$ .

Als Vorrat an Losen kann daher höchstens die Zahl  $x = 31$  die Eigenschaft haben, dass die Aussagen des Pionierleiters zutreffen.

- (II) Für diese Anzahl als Vorrat gilt in der Tat:

Das 1. Mädchen kann  $\frac{31}{2} + \frac{1}{2} = 16$  Lose kaufen. Von den dann vorhandenen 15 Losen kann das 2. Mädchen  $\frac{15}{2} + \frac{1}{2} = 8$  Lose kaufen. Von den dann vorhandenen 7 Losen kann das 3. Mädchen  $\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$  Lose kaufen. Von den dann vorhandenen 3 Losen kann das 4. Mädchen  $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$  Lose kaufen. Von dem dann vorhandenen 1 Los kann das 5. Mädchen  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  Los kaufen, und danach bleibt kein Los übrig. Für den Vorrat von 31 Losen treffen somit die Aussagen des Pionierleiters zu; die einzelnen Mädchen können nach diesen Aussagen der Reihe nach 16, 8, 4, 2, 1 Lose kaufen.



2. Lösungsweg:

Wenn die Aussagen des Pionierleiters zutreffen, so folgt: Nachdem die ersten vier Mädchen gekauft haben, wie angegeben, kann das 5. Mädchen die Hälfte der noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kaufen, und danach bleibt kein Los übrig. Also war das eben genannte halbe Los die andere Hälfte der noch vorhandenen Lose; d.h. die Anzahl der noch vorhandenen Lose hatte 1 betragen.

Also bleibt, wenn das 4. Mädchen die Hälfte der noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kauft, danach noch genau dieses eine Los übrig. Somit war dieses Los und das halbe Los zusammen die andere Hälfte der zuvor noch vorhandenen Lose; d.h. die Anzahl der noch vorhandenen Lose hatte 3 betragen.

Entsprechend schließt man: Für das 3. Mädchen hatte die Hälfte der Anzahl der zuvor noch vorhandenen Lose  $3\frac{1}{2}$ , diese Anzahl selbst also 7 betragen; für das 2. Mädchen hatte die Hälfte der Anzahl der zuvor noch vorhandenen Lose  $7\frac{1}{2}$ , diese Anzahl selbst also 15 betragen; die Hälfte der Anzahl der ganz zu Beginn vorhandenen Lose hatte  $15\frac{1}{2}$ , diese Anzahl selbst also 31 betragen.

(II) wie im 1. Lösungsweg.

*Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (0)*

Lösung 260832:

- I. Wenn ein Paar  $(p; q)$  von Primzahlen zusammen mit einer natürlichen Zahl  $n$  die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so folgt:

Nach (2) gilt  $p + q = n^2$ , nach (3) gilt  $n + p + q = 42$ , wegen der vorigen Gleichung also  $n + n^2 = 42$ , d.h.

$$n(n + 1) = 42 \quad (4)$$

Die einzigen Möglichkeiten, 42 als Produkt zweier natürlicher Zahlen darzustellen, sind (bis auf die Reihenfolge der Faktoren)

$$42 = 1 \cdot 42 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7$$

Von diesen Darstellungen enthält nur  $6 \cdot 7$  zwei Faktoren der Gestalt  $n$  und  $n + 1$ , d.h. aus (4) (für natürliche Zahlen  $n$ ) folgt

$$n = 6.$$

Nach (2) gilt somit  $p + q = 36$ . Also ist  $p$  eine der Primzahlen kleiner als 36, d.h. eine der Zahlen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,$$

und  $q$  ist jeweils die entsprechende der Zahlen

$$34, 33, 31, 29, 25, 23, 19, 17, 13, 7, 5.$$

Von diesen Möglichkeiten scheidet alle außer

$$p = 17, q = 19$$

aus, da für sie entweder  $q - p \geq 10$  oder  $q - p < 0$  wird, also (1) nicht erfüllt ist (einige auch deswegen, weil bei ihnen  $q$  keine Primzahl ist).

Also kann nur das Paar  $(p; q) = (17; 19)$  alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

- II. Es erfüllt diese Bedingungen; denn 17 und 19 sind Primzahlen, es gilt  $0 < 19 - 17 < 10$ ,  $17 + 19 = 36 = 6^2$  und  $6 + 17 + 19 = 42$ . Also erfüllt genau das Paar  $(17; 19)$  die Bedingungen der Aufgabe.

Andere Möglichkeiten, von (4) auf  $n = 6$  zu schließen:

1. Für alle natürlichen Zahlen  $n < 6$  ist  $n(n + 1) < 6 \cdot 7$ , für  $n > 6$  ist  $n(n + 1) > 6 \cdot 7$ . Also kann unter den natürlichen Zahlen  $n$  nur  $n = 6$  die Gleichung  $n(n + 1) = 42$  erfüllen.

2. Bei Kenntnis der Lösungsformel quadratischer Gleichungen (oder nach Herleitung, etwa vermittelt  $(n + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 42$ ) erhält man:

Von den beiden Lösungen

$$n_{1;2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 42} = \frac{1}{2}(-1 \pm 13)$$

der quadratischen Gleichung  $n^2 + n - 42 = 0$  ist nur  $n_1 = 6$  eine natürliche Zahl.



Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (0)

Lösung 260833:

Konstruktionsbeschreibung:

- (1) Man konstruiert ein Quadrat  $ABCD$  mit der Seitenlänge  $r$ .
- (2) Man konstruiert den Kreis  $c$  um  $M$  mit dem Radius  $\overline{AC}$ . Die Schnittpunkte  $P_1, P_2$ , die  $c$  mit  $g$  hat<sup>†</sup>, sind dann alle zu konstruierenden Punkte  $P$ .

Konstruktionszeichnung: Abb. L260833 a.

Beweis zu (I): Es sei  $P$  ein Punkt, der (a) und (b) erfüllt; die Berührungspunkte der von  $P$  an  $k$  gelegten Tangenten seien  $T_1$  und  $T_2$  (Abb. L260833 b).

Nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius gilt dann

$$\sphericalangle MT_1P = 90^\circ, \sphericalangle MT_2P = 90^\circ,$$

nach (b) gilt

$$\sphericalangle T_1PT_2 = 90^\circ.$$

Also ist  $MT_1PT_2$  ein Rechteck. Wegen

$$\overline{MT_1} = \overline{MT_2} = r$$

ist dieses Rechteck ein Quadrat mit der Seitenlänge  $r$  und folglich kongruent zu dem in (1) konstruierten Quadrat  $ABCD$ . Daraus folgt

$$\overline{MP} = \overline{AC};$$

also liegt  $P$  auf dem in (2) konstruierten Kreis  $c$ . Wegen (a) liegt  $P$  auch auf  $g$ . Also ist  $P$  einer der in (2) erhaltenen Schnittpunkte  $P_1, P_2$ , w.z.b.w.

Beweis zu (II): Es sei  $P$  ein Punkt, der nach der angegebenen Beschreibung konstruiert ist. Nach (2) liegt dann  $P$  auf  $g$ , erfüllt also die Bedingung (a). Nach (2) gilt ferner

$$\overline{AC} = \overline{MP}.$$

Da  $g$  größeren Abstand als  $r$  zu  $M$  hat und somit  $k$  meidet, gibt es zwei von  $P$  an  $k$  gelegte Tangenten. Sind  $T_1$  und  $T_2$  ihre Berührungspunkte, so folgt: Nach (1) gilt

$$\overline{AB} = \overline{MT_1},$$

nach (1) und dem Satz über Tangente und Berührungsradius gilt

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle MT_1P,$$

zugleich sind die hier genannten Winkel als rechte Winkel die größten Innenwinkel in  $\triangle ABC$  bzw.  $\triangle MT_1P$ .

Nach dem Kongruenzsatz sSW ergibt sich damit

$$\triangle ABC \cong \triangle MT_1P.$$

Ebenso folgt

$$\triangle ADC \cong \triangle MT_2P.$$

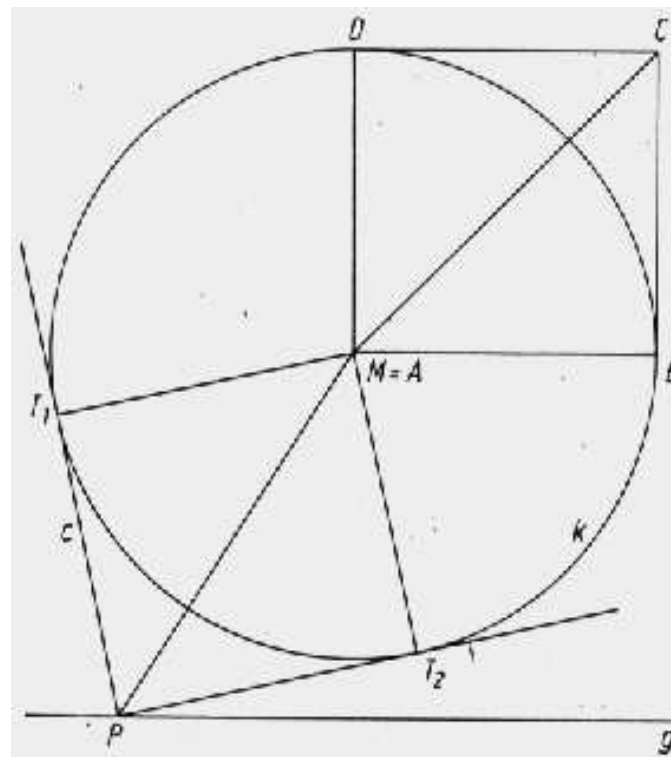
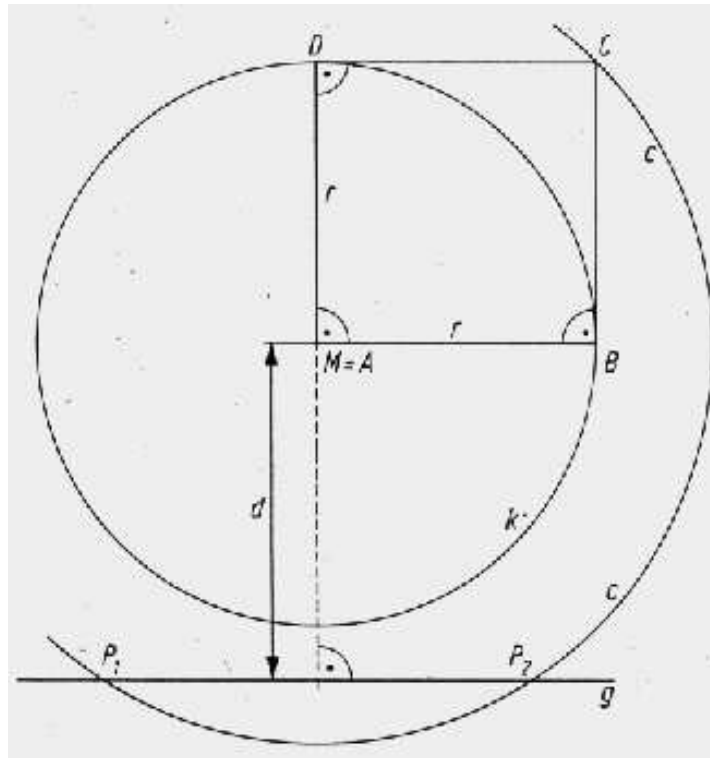
Also sind die Vierecke  $ABCD$  und  $MT_1PT_2$  zueinander kongruent. Da nach (1) nun  $\sphericalangle BCD = 90^\circ$  ist, gilt auch

$$\sphericalangle T_1PT_2 = 90^\circ;$$

d.h., auch (b) ist erfüllt, w.z.b.w.

Hinweis: Hat man im Konstruktionsschritt (1)  $A = M$  gewählt (s. Abb. L260833 a, b), so kann zum Beweis (II) auch ausgeführt werden, dass es nach (2) eine Drehung um  $M$  gibt, die  $C$  in  $P$  überführt. Bei dieser Drehung gehen die tangentialen Strecken  $CB, CD$  in tangentiale Strecken  $PT_1, PT_2$  über; und ihr rechter Winkel bleibt erhalten.

<sup>†</sup>Die Existenz (und Anzahl 2) dieser Schnittpunkte kann aus  $\overline{AC} = r\sqrt{2} > d$  (nämlich aus  $5\sqrt{2} > 6$ ) geschlossen oder der durchgeführten Konstruktion entnommen werden.



Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (0)



Lösung 260834:

Die drei in (2) genannten Punkte, die auf der in (1) genannten Geraden liegen, seien  $P_{98}, P_{99}, P_{100}$ , die übrigen der 100 Punkte seien  $P_1, P_2, \dots, P_{97}$  genannt.

Eine Gerade geht genau dann durch mehr als einen der 100 Punkte, wenn sie

- (a) entweder ein Paar verschiedener Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_{97}$  miteinander verbindet
- (b) oder einen der Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_{97}$  mit einem der Punkte  $P_{98}, P_{99}, P_{100}$  verbindet
- (c) oder die Gerade durch  $P_{98}, P_{99}, P_{100}$  ist.

Jede in (a) genannte Gerade ist von jeder in (b) genannten Geraden verschieden<sup>†</sup>. Ferner gilt: Jede in (a) genannte Gerade und jede in (b) genannte Gerade ist von der in (c) genannten Geraden verschieden<sup>‡</sup>.

1. Fortsetzungsmöglichkeit: Die Anzahl der in (a) genannten Geraden lässt sich folgendermaßen ermitteln: Man kann jeden der 97 Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_{97}$  mit jedem der 96 anderen unter diesen Punkten durch eine Gerade verbinden. Dabei hat man jede in (a) genannte Gerade genau zweimal erfasst. Also beträgt deren Anzahl

$$\frac{97 \cdot 96}{2} = 97 \cdot 48.$$

Die Anzahl der in (b) genannten Geraden beträgt  $97 \cdot 3$ . Also ist die gesuchte Anzahl

$$97 \cdot 48 + 97 \cdot 3 + 1 = 4948.$$

2. Fortsetzungsmöglichkeit: Man kann jeden der 100 Punkte mit jedem der 99 anderen durch eine Gerade verbinden. Dabei hat man jede in (a) genannte Gerade sowie jede in (b) genannte Gerade genau zweimal erfasst, die in (c) genannte Gerade dagegen genau sechsmal (nämlich als Verbindungsgerade von  $P_{98}, P_{99}$ , von  $P_{98}, P_{100}$ , von  $P_{99}, P_{98}$ , von  $P_{99}, P_{100}$ , von  $P_{100}, P_{98}$  und von  $P_{100}, P_{99}$ ).

Mit der Anzahl

$$\frac{100 \cdot 99}{2} = 50 \cdot 99$$

ist somit jede in (a) genannte und jede in (b) genannte Gerade genau einmal erfasst, die in (c) genannte Gerade dagegen genau dreimal. Also ist die gesuchte Anzahl

$$50 \cdot 99 - 2 = 4948.$$

Hinweis: Man kann auch eine schrittweise Überlegung durchführen: Für 3 Punkte, die (1) und (2) (mit der Anzahl 3 statt 100) erfüllen, gibt es genau eine gesuchte Gerade. Jeder Punkt, der dann noch so hinzugefügt wird, dass (1) und (2) (mit der jeweils neuen Anzahl  $n$  der Punkte) erfüllt bleiben, erbringt genau  $n - 1$  neue Geraden hinzu. So kommt man auf die gesuchte Anzahl  $1 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 = 1 + (3 + 99) + (4 + 98) + \dots + (50 + 52) + 51 = 1 + 48 \cdot 102 + 51 = 4948$ .

Hinweis: Sowohl für die oben dargestellten als auch für andere Lösungswege gilt: Die im Lösungsgang benötigten Verschiedenheitsfeststellungen sind anzugeben (ihr Fehlen in einer Schülerlösung beeinträchtigt deren Bewertung als vollständige Lösung). Eine Beweisformulierung wie in den Fußnoten ist dagegen nicht in dieser Ausführlichkeit zu fordern.

*Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (0)*

Lösung 260835:

- (I) Wenn  $\overline{AC} = \overline{BC}$  (1)  
gilt und  $CD$  die Seitenhalbierende von  $AB$  ist, d.h.  $D$  (auf  $AB$  liegt und)

<sup>†</sup>Beweis: Wäre die Gerade, die  $P_i$  mit  $P_j$  verbindet ( $i, j$  zwei verschiedene Zahlen  $1, 2, \dots, 97$ ), zugleich auch die Gerade, die  $P_k$  mit  $P_m$  verbindet ( $k$  eine der Zahlen  $1, 2, \dots, 97$ ;  $m$  eine der Zahlen  $98, 99, 100$ ), so lägen auf dieser Geraden die drei verschiedenen Punkte  $P_i, P_j$  und  $P_m$ , sie wäre also die in (1) genannte Gerade, und damit lägen auf ihr  $P_i, P_{98}, P_{99}, P_{100}$  im Widerspruch zu (2).

<sup>‡</sup>Beweis: Andernfalls enthielte die Gerade durch  $P_{98}, P_{99}, P_{100}$  noch einen der Punkte  $P_1, \dots, P_{97}$ , was (2) widerspricht.





$$\overline{AD} = \overline{BD} \quad (2)$$

erfüllt, so folgt aus (1), (2) und

$$\overline{CD} = \overline{DC} \quad (3)$$

nach dem Kongruenzsatz sss, dass  $\triangle ACD \cong \triangle BCD$  und damit  $\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle BCD}$  gilt. Also ist  $CD$  auch die Winkelhalbierende von  $\sphericalangle ACB$ , w.z.b.w.

(Man kann auch  $CD$  als Winkelhalbierende voraussetzen und dann aus  $\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle BCD}$ , (1), (3) mit dem Kongruenzsatz sws auf (2) schließen.)

- (II) In einem Dreieck  $ABC$  sei die Strecke  $CD$  (mit  $D$  auf  $AB$ ) sowohl Seitenhalbierende als auch Winkelhalbierende; d.h. es werde

$$\overline{AD} = \overline{BD} \quad (4)$$

$$\text{und} \quad \overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle BCD} \quad (5)$$

vorausgesetzt.

Es sei  $E$  derjenige Punkt, für den  $D$  der Mittelpunkt von  $CE$  ist (Abb. L260835 a). Dann halbieren in dem Viereck  $AEBC$  die Diagonalen einander gegenseitig, also<sup>†</sup> ist es ein Parallelogramm.

Daher gilt

$$\overline{AC} = \overline{BE} \quad (6)$$

$$\text{und} \quad \overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle BED} \quad (7)$$

(Wechselwinkel an den geschnittenen Parallelen  $AC$ ,  $BE$ ).

Aus (5) und (7) folgt  $\overline{\sphericalangle BCD} = \overline{\sphericalangle BED}$  und daraus nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes

$$\overline{BC} = \overline{BE} \quad (8)$$

Aus (6) und (8) folgt  $\overline{AC} = \overline{BC}$ , w.z.b.w.

Andere Fortsetzungsmöglichkeit nach (5):

Es sei  $B'$  derjenige Punkt auf dem Strahl aus  $C$  durch  $A$ , für den

$$\overline{B'C} = \overline{BC} \quad (9)$$

gilt. Aus (5), (9) und

$$\overline{CD} = \overline{CD} \quad (10)$$

folgt dann nach dem Kongruenzsatz sws, dass  $\triangle B'CD \cong \triangle BCD$  und damit

$$\overline{\sphericalangle DB'C} = \overline{\sphericalangle DBC} = \overline{\sphericalangle ABC} \quad (11)$$

$$\text{und} \quad \overline{B'D} = \overline{BD} \quad (12)$$

$$\text{nach (4) also} \quad \overline{B'D} = \overline{AD} \quad (13)$$

gilt.

Wäre nun  $B' \neq A$  (Abb. L 260835 b oder c), so wäre  $AB'D$  nach (13) ein gleichschenkliges Dreieck, einer der beiden Winkel  $\sphericalangle DB'C$  und  $(\sphericalangle BAC =) \sphericalangle DAC$ , wäre ein Basiswinkel dieses gleichschenkligen Dreiecks, der andere der beiden Winkel  $\sphericalangle DB'C$ ,  $\sphericalangle BAC$  wäre ein Nebenwinkel des zweiten Basiswinkels. Daher ergäbe sich  $\overline{\sphericalangle DB'C} + \overline{\sphericalangle BAC} = 180^\circ$ , nach (11) also  $\overline{\sphericalangle ABC} + \overline{\sphericalangle BAC} = 180^\circ$ , im Widerspruch zum Innenwinkelsatz für Dreieck  $ABC$ . Also muss  $B' = A$  und nach (9) somit  $\overline{AC} = \overline{BC}$  gelten, w.z.b.w.

Weitere Hinweise:

Die Anwendung des Kongruenzsatzes sSW auf (4), (5), (10) ist nicht möglich, da auch  $\overline{AD} < \overline{CD}$  sein kann. Möglich ist dagegen die Anwendung der folgenden Variante dieses Kongruenzsatzes: „Gilt für zwei Dreiecke  $ABC$ ,  $A'B'C'$  (mit den üblichen Bezeichnungen)  $a = a'$ ,  $b = b'$ ,  $\alpha = \alpha'$  und  $\beta + \beta' \neq 180^\circ$  so folgt (auch ohne die Voraussetzung  $a > b$ ), dass die Dreiecke kongruent sind.“ Unter Verwendung dieses Sachverhaltes folgt aus (4), (5), (10) und  $\overline{\sphericalangle DAC} + \overline{\sphericalangle DBC} \neq 180^\circ$  (Innenwinkelsatz für Dreieck  $ABC$ ) sofort  $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ . (In die obige Fortsetzungsmöglichkeit (9), (10), ... ist stattdessen ein Beweis dieser Kongruenzsatzvariante eingebaut.)

*Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (0)*

<sup>†</sup>Dieser Schluss kann als bekannter Sachverhalt zitiert oder aus  $\overline{AD} = \overline{BD}$ ,  $\overline{CD} = \overline{ED}$ ,  $\overline{\sphericalangle ADC} = \overline{\sphericalangle BDE}$  (Scheitelwinkel) über den Kongruenzsatz sws erhalten werden.



Lösung 260836:

Wegen der Umfangsgleichheit von  $ABC$  und  $ABD$  gilt

$$a + b + c = p + q + c \quad (1)$$

Wegen der Umfangsgleichheit von  $ABC$  und  $ACD$  gilt

$$a + b + c = p + b + r \quad (2)$$

Wegen der Umfangsgleichheit von  $ABC$  und  $BCD$  gilt

$$a + b + c = a + q + r \quad (3)$$

Behauptung: Hieraus folgt:  $a, b, c$  sind eindeutig bestimmt und zwar gilt

$$a = p, b = q, c = r.$$

1. Beweismöglichkeit hierzu: Aus (1) folgt

$$a + b = p + q. \quad (4)$$

aus (3) und (2) folgt

$$a + q + r = p + b + r$$

und daraus

$$a + q = p + b. \quad (5)$$

Addiert man (4) und (5), so ergibt sich

$$2a + b + q = 2p + b + q$$

und daraus

$$a = p.$$

Setzt man dies in (1) bzw. in (2) ein, so ergibt sich

$$b = q \text{ bzw. } c = r.$$

2. Beweismöglichkeit:

Addition von (1), (2), (3) ergibt

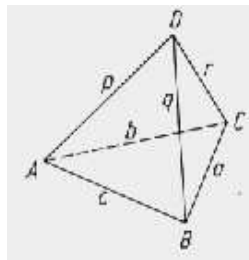
$$3(a + b + c) = a + b + c + 2(p + q + r),$$

also

$$a + b + c = p + q + r \quad (6)$$

Aus (6) zusammen mit (1) bzw. mit (2) bzw. mit (3) folgt

$$c = r \text{ bzw. } b = q \text{ bzw. } a = p.$$



*Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (0)*



---

## Quellenverzeichnis

(0) Unbekannt