28. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Saison 1988/1989

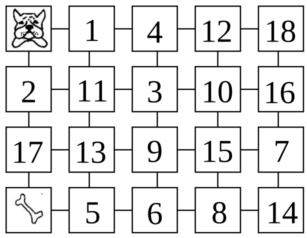
Aufgaben und Lösungen

28. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

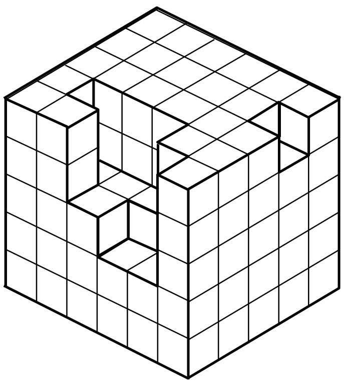
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 280611:

Bello kann nur dann zum Knochen gelangen, wenn er einen Weg wählt, bei dem das Produkt der dabei überquerten Zahlen 2 431 beträgt. Welchen Weg muß er wählen?



Aufgabe 280612:



Ein großer Quader wurde in kleine, untereinander gleich große Würfel zerlegt. Wie in der Abbildung ersichtlich, wurden dann einige kleine Würfel herausgenommen. Von denjenigen kleinen Würfeln, die in der Abbildung nicht zu sehen sind, wurde aber keiner weggenommen.

Wie viele der kleinen Würfel enthält dann der in der Abbildung gezeigte Restkörper insgesamt noch?

Beschreibe, wie du die gesuchte Anzahl gefunden hast!

Aufgabe 280613:

Mario, Petra, Rigo und Tanja unterhalten sich darüber, welche Plätze sie bei der Schulolympiade wohl belegen werden. Dabei äußern sie folgende Meinungen:

(1) Tanja wird den ersten Platz erreichen und Petra den zweiten.

(2) Tanja wird Zweite werden und Rigo Dritter.

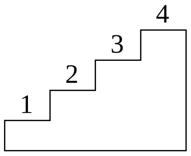
(3) Mario wird den zweiten Platz und Rigo den vierten belegen.

(4) Keine zwei Schüler werden auf den gleichen Platz kommen.

Nach Abschluß der Schulolympiade stellt sich heraus, daß die Aussage (4) wahr ist und daß in den Meinungen (1), (2) und (3) jeweils genau eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch ist.

Gib an, welcher Schüler hiernach welchen Platz bei der Schulolympiade belegte! Zeige, daß die von dir genannte Platzverteilung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

Aufgabe 280614:



Die Treppe in der Abbildung besteht aus vier Stufen. Um diese vierstufige Treppe hinaufzugehen, darf man jeweils mit einem Schritt entweder genau eine oder genau zwei Stufen nach oben steigen. (Eine hiernach mögliche Schrittfolge lautet z.B. 1, 3, 4.)

a) Gib für diese Treppe alle möglichen Schrittfolgen an! Wieviel sind es insgesamt?

b) Gib für eine dreistufige Treppe alle möglichen Schrittfolgen an, ebenso für eine zweistufige Treppe und für eine einstufige Treppe!

c) Jemand behauptet: "Man kann die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine vierstufige Treppe durch eine einfache Rechnung finden, wenn man die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe und die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine zweistufige Treppe kennt."

Gib eine solche einfache Rechnung an! Schreibe sie in Form einer Gleichung!

d) Schreibe entsprechend eine Gleichung, mit der sich die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe aus den entsprechenden Anzahlen für eine zweistufige und für eine einstufige berechnen läßt!

e) Wie kommt es, daß die in c) und d) gefundenen Beziehungen gelten?

f) Gib die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine fünfstufige und für eine sechsstufige Treppe an!

28. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 280611:

Die Zahl 2 431 hat folgende Eigenschaften:

Sie ist weder durch 2 noch durch 4 teilbar; denn sie ist ungerade. Sie ist nicht durch 3 und auch nicht durch 9 teilbar; denn ihre Quersumme $2 + 3 + 4 + 1 = 10$ ist weder durch 3 noch durch 9 teilbar. Sie ist nicht durch 5 teilbar; denn sie hat als letzte Ziffer weder die 0 noch die 5.

Daher kommt auf dem Bild nur ein Weg in Frage, der die Zahlen 2, 3, 4, 9 und 5 vermeidet. Es gibt genau einen solchen Weg, nämlich über 1, 11, 13, 17. Wegen $1 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 2\,431$ liefert er das geforderte Produkt. Also muß Bello genau diesen Weg wählen.

Andere Lösungsdarstellung: Wegen der Primfaktorzerlegung $2\,431 = 11 \cdot 13 \cdot 17$ können auf einem gesuchten Weg außer der Zahl 1 nur die drei Primzahlen 11, 13 und 17 oder Produkte dieser Primzahlen vorkommen. Es gibt auf dem Bild genau einen solchen Weg, nämlich den über 1, 11, 13, 17 ... u.s.w. wie oben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 280612:

Die gesuchte Anzahl der kleinen Würfel beträgt 135; man kann sie durch folgende Überlegung finden:

Der große Quader bestand ursprünglich wegen $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ aus genau 150 kleinen Würfeln. Aus ihm wurden genau 15 kleine Würfel herausgenommen, nämlich

genau 8 aus der vordersten Schicht,
genau 6 aus der zweiten Schicht von vorn,
genau 1 aus der vierten Schicht von vorn.

Wegen $150 - 15 = 135$ enthält der Restkörper somit genau 135 kleine Würfel.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 280613:

Eine mögliche Verteilung lautet:

Tanja - 1. Platz; Mario - 2. Platz; Rigo - 3. Platz; Petra - 4. Platz.

Bei dieser Verteilung ist die Angabe (4) wahr. In (1) ist "Tanja erreicht den ersten Platz" wahr und "Petra den zweiten" falsch. In (2) ist "Tanja wird Zweite" falsch und "Rigo Dritter" wahr. In (3) ist "Mario belegt den zweiten Platz" wahr und "Rigo den vierten" falsch. Somit ist in den Meinungen (1) bis (3) jeweils genau eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch.

Bemerkung: Wenn man nachweisen will, daß keine andere Verteilung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt (ein solcher Nachweis wurde nicht verlangt), so kann man folgendermaßen vorgehen:

Käme Tanja nicht auf den 1. Platz, so wäre in (1) die erste Aussage falsch, also die zweite wahr, d.h., Petra käme auf den 2. Platz. Daher wäre in (2) und (3) jeweils die erste Aussage falsch und somit die zweite wahr. Dann müßte Rigo aber sowohl auf den 3. als auch auf den 4. Platz kommen.

Da das nicht möglich ist, scheidet dieser Fall aus. Also kommt Tanja auf den 1. Platz. Daher ist in (2) die erste Aussage falsch, die zweite wahr, d.h., Rigo kommt auf den 3. Platz. Folglich ist in (3) die zweite Aussage falsch, die erste wahr, d.h., Mario kommt auf den 2. Platz, und für Petra verbleibt der 4. Platz.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 280614:

a) Alle möglichen Schrittfolgen für die vierstufige Treppe sind:

1, 2, 3, 4;
1, 2, 4;
1. 3, 4;
2, 3, 4;
2, 4.

b) Alle möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe sind:

1, 2, 3;
1. 3;
2, 3.

Alle möglichen Schrittfolgen für eine zweistufige Treppe sind:

1, 2;
2.

Für eine einstufige Treppe gibt es genau die Schrittfolge

1.

c) Die Anzahl der Schrittfolgen bei einer vierstufigen Treppe ist gleich der Summe der Anzahlen der Schrittfolgen bei der dreistufigen und der zweistufigen Treppe: $5 = 3 + 2$.

d) Die Anzahl der Schrittfolgen bei einer dreistufigen Treppe ist gleich der Summe der Anzahlen der Schrittfolgen bei der zweistufigen und der einstufigen Treppe: $3 = 2 + 1$.

e) Um in der angegebenen Weise die vierstufige Treppe hinaufzugehen, kann man entweder mit dem ersten Schritt nur eine Stufe steigen und hat dann noch drei Stufen vor sich, oder man kann mit dem ersten Schritt zwei Stufen nehmen und hat dann nur noch zwei Stufen vor sich.

Im ersten Fall ist die Anzahl der möglichen Fortsetzungen gleich der Anzahl der Schrittfolgen bei einer dreistufigen Treppe, und im zweiten Fall ist sie gleich der Anzahl der Schrittfolgen bei einer zweistufigen Treppe. Folglich ist die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen bei der vierstufigen Treppe gleich der Summe der Anzahlen möglicher Schrittfolgen bei der dreistufigen und der zweistufigen Treppe.

f) Entsprechend folgt: Die Gleichung $8 = 5 + 3$ führt zur Anzahl 8 der Schrittfolgen bei einer fünfstufigen Treppe; die Gleichung $13 = 8 + 5$ führt zur Anzahl 13 der Schrittfolgen bei einer sechsstufigen Treppe.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Quellenverzeichnis

(31) Broschüre vom Volk und Wissen Verlag (VWV)