28. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1988/1989

Aufgaben und Lösungen

28. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 280711:

Ein Spiel für zwei Mitspieler hat folgende Regel:

Einer der beiden nennt eine beliebige einstellige Zahl. Der andere nennt eine größere natürliche Zahl, die jedoch höchstens um 10 größer sein darf als die vorhergenannte. So wechselt man ab. Gewonnen hat derjenige, der unter Beachtung der Spielregeln die Zahl 100 nennen kann.

a) Gibt es für den beginnenden Spieler eine Möglichkeit, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen?

b) Gibt es aber auch einen Spielbeginn, der anschließend dem zweiten Spieler eine Möglichkeit gibt, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen?

Aufgabe 280712:

Aus den Ziffern 1, 3, 4, 5, 7 und 9 sollen sechsstellige natürliche Zahlen gebildet werden, in denen jede dieser Ziffern genau einmal vorkommt.

a) Ermittle die Anzahl aller verschiedenen Zahlen, die auf diese Weise gebildet werden können.

b) Untersuche, welche von den auf diese Weise gebildeten Zahlen durch 18 teilbar sind!

Aufgabe 280713:

a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$, in dem der Winkel $\sphericalangle DAB$ ein spitzer Winkel ist! Konstruiere das Lot von D auf die Gerade durch A und B; den Fußpunkt dieses Lotes bezeichne mit E! Konstruiere das Lot von B auf die Gerade durch C und D; den Fußpunkt dieses Lotes bezeichne mit F!

b) Beweise, daß in jedem solchen Parallelogramm $ABCD$ für die so konstruierten Punkte E, F $\Delta AED \simeq \Delta CFB$ gilt!

Aufgabe 280714:

Im Mathematikunterricht stellt der Lehrer die Aufgabe, die Seitenlängen eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ zu ermitteln, wenn vorausgesetzt wird, daß eine der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks den Dreiecksumfang derart teilt, daß der eine Teil 12 cm und der andere 9 cm beträgt.

Dazu äußern sich einzelne Schüler folgendermaßen:

Achim:	"Die Aufgabe hat keine Lösung, denn die Seitenhalbierende eines gleichschenkligen Dreiecks ist Symmetrieachse und kann somit den Umfang nur in zwei gleich große Teile zerlegen."
Birgit:	"Es gibt bis auf Kongruenz genau ein Dreieck, das die Forderungen der Aufgabenstellung erfüllt."

Claudia: "Die Aufgabe hat bis auf Kongruenz genau zwei (zueinander nicht kongruente) Lösungen."

Dorit: "Da man in ein Dreieck drei Seitenhalbierende einzeichnen kann, hat die Aufgabe mindestens drei zueinander nicht kongruente Lösungen."

Untersuche, wer von den vier Schülern recht hat, und begründe deine Feststellungen!

28. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 280711:

a) Für den beginnenden Spieler gibt es eine Möglichkeit, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen. Man kann dies folgendermaßen zeigen:

   Der Spieler kann den Gewinn erzwingen, wenn sich (im Verlauf des Spiels) herausstellt:

   Der Spieler kann erreichen, daß sein Gegenspieler eine der Zahlen 90, 91, ..., 99 nennen muß. (1)

   Von jeder dieser Zahlen aus ist nämlich die Zahl 100 im nächsten Schritt erreichbar. Wenn nun der Spieler selbst die Zahl 89 nennen kann, so trifft für ihn (1) zu, und er kann den Gewinn erzwingen.

   Diese Zahl 89 ist um 11 kleiner als 100. Verkleinert man sie nochmals um 11 und wendet entsprechende Überlegungen an, so folgt: Wenn der Spieler selbst die Zahl 78 nennen kann, so muß sein Gegenspieler eine der Zahlen 79, 80, ..., 88 nennen. Damit hat wiederum der Spieler in jedem Fall die Möglichkeit, 89 zu nennen und kann den Gewinn erzwingen.

   Weitere Zahlen, deren Erreichen die Möglichkeit ergibt, den Gewinn zu erzwingen, sind entsprechend durch Subtraktion von 11 zu erhalten. Sie lauten 67, 56, 45, 34, 23, 12 und 1.

   Damit ist gezeigt:

   Der beginnende Spieler kann das Spiel dadurch in jedem Fall gewinnen, daß er der Reihe nach (stets, wenn er am Spiel ist) die Zahlen 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 und dann 100 nennt. (2)

b) Es gibt auch einen Spielbeginn, der anschließend dem zweiten Spieler eine Möglichkeit gibt, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen.

   Ein solcher Spielbeginn liegt vor, wenn der beginnende Spieler als erste Zahl eine der Zahlen 2, 3, ... 9 nennt. Dann nämlich hat der zweite Spieler die Möglichkeit, die Zahl 12 zu nennen, und von da ab kann er der Reihe nach (stets, wenn er am Spiel ist) die weiteren in (2) angeführten Zahlen nennen. Wie in a) gezeigt ist, erzwingt er damit den Gewinn.

Bemerkung: Durch ähnliche Überlegungen folgt allgemein: Sobald (irgendwann während des Spiels) einer der beiden Spieler die Zahlenfolge (2) verläßt, kann der andere den Gewinn erzwingen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 280712:

a) Mit zwei Ziffern kann man genau zwei verschiedene zweistellige Zahlen bilden (z. B. 13 und 31). (1)

   Nimmt man eine dritte Ziffer hinzu, so kann diese vor, zwischen oder hinter die beiden Ziffern der zweistelligen Zahl gesetzt werden; das sind somit drei Möglichkeiten. Aus (1) folgt demnach wegen $2 \cdot 3 = 6$, daß aus drei verschiedenen Ziffern genau sechs verschiedene dreistellige Zahlen gebildet werden können. (2)

Bildet man nun unter Hinzunahme einer vierten Ziffer vierstellige Zahlen, kann diese vierte Ziffer an erster, zweiter, dritter oder vierter Stelle stehen (vier Möglichkeiten), und aus (2) folgt wegen $6 \cdot 4 = 24$, daß auf diese Weise 24 vierstellige Zahlen gebildet werden können. (3)

Durch analoge Überlegungen erkennt man, daß es hinsichtlich der Stellung einer fünften Ziffer in einer vierstelligen Zahl genau fünf Möglichkeiten gibt und somit wegen (3) und $5 \cdot 24 = 120$ insgesamt 120 fünfstellige Zahlen gebildet werden können. (4)

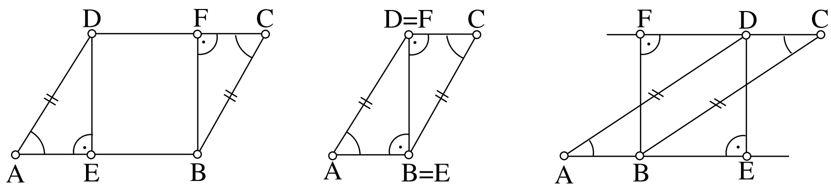
Die Anzahl der sechsstelligen Zahlen ergibt sich analog aus (4) und wegen $6 \cdot 120 = 720$. Somit können aus den genannten Ziffern genau 720 verschiedene sechsstellige Zahlen gebildet werden.

b) Eine natürliche Zahl ist nur dann durch 18 teilbar, wenn sie durch 9 teilbar ist. Dies ist nur dann der Fall, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Alle 720 auf die geforderte Weise gebildeten Zahlen haben jedoch die Quersumme $1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 9 = 29$, folglich ist keine dieser Zahlen durch 18 teilbar.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 280713:

a) In den Abbildungen sind drei Beispiele einer geforderten Zeichnung angegeben. Verlangt wird eine Zeichnung nach der Art *eines* dieser Beispiele.



b) Für jedes solche Parallelogramm $ABCD$ und die konstruierten Punkte E, F gilt

$$\begin{array}{rcll} \overline{AD} &=& \overline{CB} & \text{(Gegenseiten im Parallelogramm)} \quad (1)\\ \overline{\sphericalangle AED} &=& \overline{\sphericalangle CFB} & \text{(Lote, nach Konstruktion)} \quad (2)\\ \overline{\sphericalangle DAE} &=& \overline{\sphericalangle BCF} & \text{(gegenüberliegende Winkel im Parallelogramm)} \quad (3) \end{array}$$

Aus (1), (2), (3) folgt: Die Dreiecke AED und CFB stimmen in einer Seite und zwei Winkeln überein, nach dem Innenwinkelsatz also auch im dritten Winkel. Daher folgt aus den Kongruenzsatz (wsw): $\Delta AED \simeq \Delta CFB$. □

Hinweis: Zu b) können auch andere Kongruenzsätze herangezogen werden. Falls man (1), (2) und $\overline{DE} = \overline{BF}$ (Lote zwischen Parallelen) zugrunde legt, ist wegen des Rückgriffs auf Kongruenzsatz (ssw) die Feststellung $\overline{AD} > \overline{DE}$ bzw. $\overline{CB} > \overline{BF}$ (Hypotenuse und Kathete im rechtwinkligen Dreieck) erforderlich.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 280714:

Wenn AD, BE und CF die Seitenhalbierenden eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ $\overline{AB} = c$ sind, so gilt:

Die Teile, in die CF den Umfang teilt, haben die Längen

$$a + \tfrac{c}{2} \text{ und } a + \tfrac{c}{2}. \tag{1}$$

(Siehe Abbildung a)

Ferner haben sowohl die Teile, in die AD den Umfang teilt, als auch die Teile, in die BE den Umfang teilt, die Längen

$$c + \tfrac{a}{2} \text{ und } a + \tfrac{a}{2} = \tfrac{3}{2}a. \tag{2}$$

(Siehe Abbildungen b und c)

Die Längen (1) sind einander gleich, können also nicht 12 cm und 9 cm betragen; daher kann die Forderung der Aufgabe nicht mit der Seitenhalbierenden CF erfüllt werden!

Dafür, daß die Längen (2), wie gefordert, 12 cm und 9 cm betragen, gibt es nur die beiden folgenden Möglichkeiten:

I. Es ist $\frac{3}{2}a = 12$ cm und $c + \frac{a}{2} = 9$ cm. Dann folgt $a = \frac{2}{3} \cdot 12$ cm $= 8$ cm und $c = 9$ cm $- \frac{a}{2} = 5$ cm.

II. Es ist $\frac{3}{2}a = 9$ cm und $c + \frac{a}{2} = 12$ cm. Dann folgt $a = \frac{2}{3} \cdot 9$ cm $= 6$ cm und $c = 12$ cm $- \frac{a}{2} = 9$ cm.

Ein Dreieck ABC mit den in I. genannten Längen $\overline{AC} = \overline{BC} = 8$ cm, $\overline{AB} = 5$ cm gibt es, da die Summe je zweier Seiten größer ist als jeweils die dritte Seite. In einem solchen Dreieck ist auch, wie gefordert, $\frac{3}{2}a = \frac{3}{2} \cdot 8$ cm $= 12$ cm und $c + \frac{a}{2} = 5$ cm $+ 4$ cm $= 9$ cm.

Ein Dreieck ABC mit den in II. genannten Längen $\overline{AC} = \overline{BC} = 6$ cm, $\overline{AB} = 9$ cm gibt es (aus demselben Grund) ebenfalls, und es ist auch, wie gefordert, $\frac{3}{2}a = \frac{3}{2} \cdot 6$ cm $= 9$ cm und $c + \frac{a}{2} = 9$ cm $+ 3$ cm $= 12$ cm.

Wegen der Verschiedenheit ihrer Seitenlängen sind die beiden genannten Dreiecke auch nicht zueinander kongruent.

Damit ist bewiesen: Achim, Birgit und Dorit haben nicht recht; Claudia hat recht.

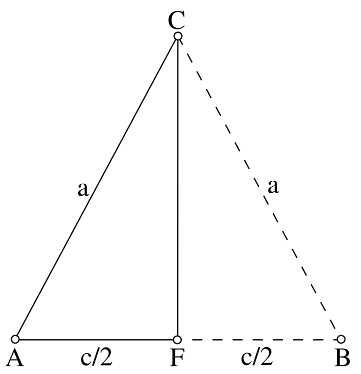


Abbildung a

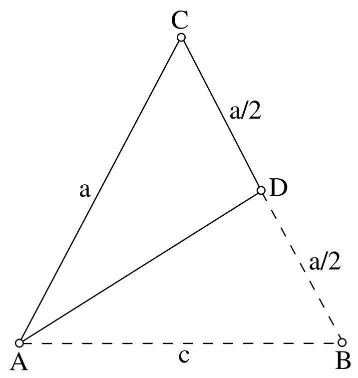


Abbildung b

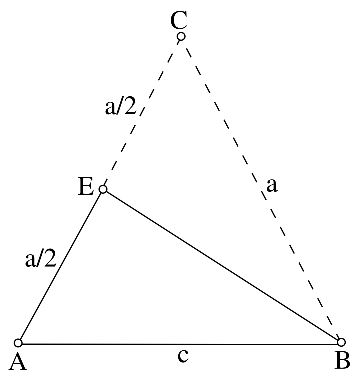


Abbildung c

Bemerkung: Zu den im Aufgabentext gegebenen Aussagen kann man feststellen:

Achims Fehler war, daß er nur die Seitenhalbierende CF und nicht auch die anderen Seitenhalbierenden beachtete.

Dorits Fehler war, nicht zu beachten, daß Lösungen, die die Bedingungen mit verschiedenen Seitenhalbierenden (AD bzw. BE) erfüllen, trotzdem zueinander kongruent sein können. Außerdem beachtete Dorit nicht, daß es einerseits Seitenhalbierende (CF) geben kann, mit denen die Bedingung nicht erfüllt werden kann, andererseits aber auch Seitenhalbierende (AD und BE), mit denen die Bedingung auf mehr als eine Weise erfüllbar ist.

Birgit und Claudia haben beide keine Begründung bzw. keinen Begründungsversuch angegeben; Birgit nicht für ihre falsche Aussage und Claudia nicht für ihre wahre Aussage.

Derartige Feststellungen werden nicht (zu einer vollständigen Lösung) vom Schüler verlangt. Wird jedoch die Aussage, daß Achim bzw. Dorit nicht recht hat, mit dem Aufweisen eines Fehlers der genannten Art begründet, so kann dies als Lösungsbestandteil (anteilig) gewertet werden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission