29. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Saison 1989/1990

Aufgaben und Lösungen

29. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 290511:

Kerstin erhält am 30. April zu ihrem Geburtstag von mehreren Verwandten Geld geschenkt. Sie hat nun genau 35 Mark in ihrer Sparbüchse und nimmt sich vor, in den folgenden Monaten fleißig Altstoffe zu sammeln, so daß sie am Ende jedes Monats genau 5 Mark in die Sparbüchse stecken kann.

Am Ende welchen Monats werden, wenn ihr Vorhaben gelingt, erstmals 55 Mark in der Sparbüchse sein?

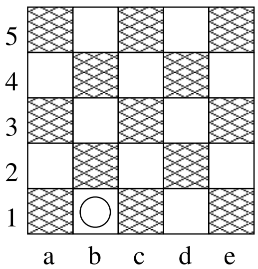
Aufgabe 290512:

Wenn man zwei zweistellige Zahlen hintereinanderschreibt, entsteht eine vierstellige Zahl.

Gib zwei zweistellige Zahlen so an, daß die Summe aus diesen beiden Zahlen und der daraus gebildeten vierstelligen Zahl genau 1 478 beträgt!

(Ein Nachweis, daß es nur eine einzige Möglichkeit für zwei solche Zahlen gibt, wird nicht verlangt. Du kannst aber versuchen, einen solchen Nachweis zu finden.)

Aufgabe 290513:



Das Bild zeigt ein Spielbrett mit einem Damestein auf dem Feld $b1$. Er darf, wie im Damespiel üblich, stets einen Schritt nach links oben oder nach rechts oben gehen. So kann er in vier Schritten auf die oberste Zeile (d.h. auf irgendeines der beiden Felder $b5$, $d5$) gelangen.

Gesucht ist die Anzahl aller verschiedenen Wege, auf denen dieses Ziel erreichbar ist. Gib diese Anzahl an und beschreibe, wie du sie gefunden hast!

Aufgabe 290514:

a) Zeichne in einem Koordinatensystem (Einheit 1 cm) ein Dreieck ABC mit $A(1;2)$, $B(3;2)$, $C(1;4)$!

b) Wähle $\overrightarrow{AB}$ als Verschiebungspfeil und zeichne das bei dieser Verschiebung aus dem Dreieck ABC entstehende Bild $A'B'C'$ in dasselbe Koordinatensystem!

c) Zeichne dazu noch das bei der Verschiebung $\overrightarrow{A'C}$ entstehende Bild $A''B''C''$ des Dreiecks $A'B'C'$!

d) Welche Dreiecke und welche Parallelogramme sind mit ihren vollständigen Seitenkanten in der nun entstandenen Gesamtfigur insgesamt enthalten? Zähle diese Dreiecke und Parallelogramme wie üblich durch Angabe ihrer Eckpunkte auf!

29. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 290511:

Wegen $55-35 = 20$ benötigt Kerstin zum Erreichen ihres Zieles noch genau 20 Mark. Da sie in jedem Monat 5 Mark sparen will, braucht sie wegen $20 : 5 = 4$ noch genau 4 Monate dazu. Der vierte Monat nach dem April ist der August. Die gewünschten 55 Mark werden also erstmals am Ende des Monats August in der Sparbüchse sein.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290512:

Zwei solche Zahlen sind 14 und 32; denn es gilt $14 + 32 + 1432 = 1478$.

Hinweis: Zum Auffinden solcher Zahlen und zum Einzigkeitsnachweis kann man kommen, indem man die Aufgabe als Kryptogramm

$$\begin{array}{ccccc} & & & x & y \\ + & & & u & v \\ + & x & y & u & v \\ \hline & 1 & 4 & 7 & 8 \end{array}$$

schreibt und dann folgendermaßen überlegt: Da in der Einerstelle entweder $y + 2v = 8$ oder $y + 2v = 18$ gelten soll, muß y eine gerade Zahl sein. Also muß die 4 in der Hunderterstelle der Summe ohne Übertrag von der Zehnerstelle aus $y = 4$ entstanden sein.

An der Tausenderstelle erkennt man ferner $x = 1$. Weiter folgt: in der Einerstelle kann nicht $4 + 2v = 18$ gelten; denn dann erhielte man in der Zehnerstelle $1 + 2u + 1$, also eine gerade Zahl. Somit muß $4 + 2v = 8$ und daher $v = 2$ gelten. In der Zehnerstelle folgt somit ohne Übertrag aus der Einerstelle, $1 + 2u = 7$ und daher $u = 3$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290513:

	a	b	c	d	e
5		5		4	
4	2		3		1
3		2		1	
2	1		1		0
1		1		0	

Die Anzahl aller genannten Wege ist 9. Man kann sie finden, indem man in jedes (weiße) Feld die Anzahl aller derjenigen Wege einträgt, auf denen dieses Feld von $b1$ aus erreichbar ist, und dabei der Reihe nach die Felder der Zeilen 1, 2, 3, 4, 5 abarbeitet:

Das Feld $b1$ erhält die Anzahl 1, das Feld $d1$ die Anzahl 0.

In jedes weitere Feld wird die Summe der (höchstens zwei) Anzahlen eingetragen, die schräg unter diesem Feld liegen, denn genau aus solchen Feldern führen alle Wege auf das betrachtete Feld. So kommt man zu den Eintragungen in der Abbildung und damit wegen $5 + 4 = 9$ zur gesuchten Anzahl 9 aller genannten Wege.

Hinweis: Man kann auch (obwohl das nicht verlangt ist) die Wege selbst angeben. Sie lauten:

$$b1,\ a2,\ b3,\ a4,\ b5,$$
$$b1,\ a2,\ b3,\ c4,\ b5,$$
$$b1,\ a2,\ b3,\ c4,\ d5,$$
$$b1,\ c2,\ b3,\ a4,\ b5,$$
$$b1,\ c2,\ b3,\ c4,\ b5,$$
$$b1,\ c2,\ b3,\ c4,\ d5,$$
$$b1,\ c2,\ d3,\ c4,\ b5,$$
$$b1,\ c2,\ d3,\ c4,\ d5,$$
$$b1,\ c2,\ d3,\ e4,\ d5.$$

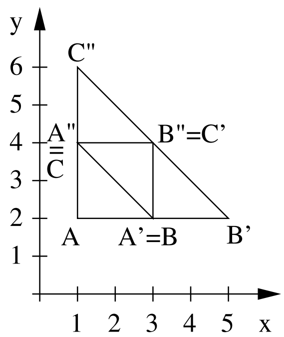
Zur Beschreibung, wie sie zu finden sind, kann man angeben, daß von jedem weißen Feld des linken oder rechten Randes aus genau eine Fortsetzung möglich ist, von den anderen Feldern der Zellen 1 bis 4 aber je genau zwei Fortsetzungen möglich sind (nach links oben und nach rechts oben).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290514:

a) bis c) siehe Abbildung.

d) In der Gesamtfigur sind insgesamt die Dreiecke ABC, $AB'C''$, $A'B'C'$, $A'B''C$, $A''B''C''$ und die Parallelogramme $ABB''A''$, $A'B'B''A''$, $A'C'C''A''$ mit ihren vollständigen Seitenkanten enthalten.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission