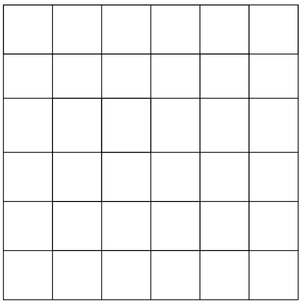
29. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1989/1990

Aufgaben und Lösungen

29. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 290711:



Auf ein 6×6 - Felderbrett (siehe Bild) sollen 18 Steine so verteilt werden, daß jeder Stein in genau einem Feld liegt, in jedem Feld nicht mehr als ein Stein liegt sowie in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder Diagonalen nicht mehr als drei Steine liegen.

Gib eine derartige Verteilung an!

Hinweis: Unter einer Diagonale wollen wir in dieser Aufgabe jede Gerade verstehen, die in einer Diagonalrichtung des Quadrates durch die Mittelpunkte von mehreren (mindestens 2, höchstens 6) Feldern verläuft. Es gibt folglich auf diesem Brett genau 18 verschiedene Diagonalen.

Aufgabe 290712:

Thomas, Uwe und Volker belegten bei einer Mathematikolympiade die ersten drei Plätze, jeder von ihnen einen anderen Platz als die beiden anderen. Über diese Plazierung wurden nun die folgenden drei Aussagen gemacht:

(1) Thomas wurde nicht Erster.

(2) Uwe wurde nicht Zweiter.

(3) Volker wurde Zweiter.

Von diesen drei Aussagen (1), (2), (3) ist genau eine wahr.

Untersuche, ob sich hieraus ermitteln läßt, wer von den drei Schülern den ersten, den zweiten und den dritten Platz belegte! Ist dies der Falt so gib die Plazierung an!

Aufgabe 290713:

Rolf sagt an seinem Geburtstag, dem 1. September 1989: "Die Quersumme der Jahreszahl meines Geburtsjahres ist zugleich auch das in Jahren gerechnete Alter, das ich heute erreiche."

Untersuche, ob es genau ein Jahr als Rolfs Geburtsjahr gibt, für das seine Aussage zutrifft! Ist das der Fall, so gib dieses Geburtsjahr an!

Aufgabe 290714:

Bei der Wiederholung des Innenwinkelsatzes für konvexe Vierecke geraten Anja und Klaus in einen Streit:

Klaus behauptet: "Zerlegt man ein beliebiges konvexes Viereck $ABCD$ durch Einzeichnen der Diagonalen AC in die beiden Teildreiecke ABC und ADC, dann beträgt die Innenwinkelsumme jedes dieser Teildreiecke

180°. Folglich muß im Viereck $ABCD$ die Innenwinkelsumme $2 \cdot 180° = 360°$ betragen."

Anja entgegnet: "Zeichnet man aber noch die zweite Diagonale BD ein, dann erhält man vier Teildreiecke. Die Innenwinkelsumme von $ABCD$ muß folglich $4 \cdot 180° = 720°$ betragen."

Untersuche, welcher der beiden Schüler recht hat! Begründe deine Entscheidung!

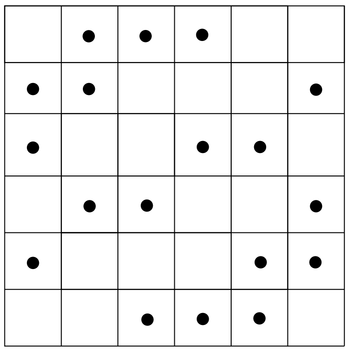
Anmerkung: Unter einem konvexen Viereck versteht man ein Viereck, dessen beide Diagonalen innerhalb dieses Vierecks liegen (vgl. Lb. 6, S. 179).

29. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 290711:

Eine mögliche Verteilung zeigt die Abbildung.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290712:

Wäre (3) die wahre Aussage, dann folgte, da (3) wahr und (2) falsch wäre, daß sowohl Volker als auch Uwe den zweiten Platz belegt hätten; im Widerspruch zum Aufgabentext.

Wäre (2) die wahre Aussage, dann folgte, da (2) wahr und (1), (3) falsch wären, daß keiner der drei Schüler den zweiten Platz belegt hätte; ebenfalls im Widerspruch zum Aufgabentext.

Somit kann nur (1) wahr sein. Da folglich (2) falsch ist, ergibt sich: Uwe wurde Zweiter. Hiernach und da (1) wahr ist, folgt: Thomas wurde Dritter, Volker wurde Erster.

Hiermit ist auch gezeigt, daß sich diese Plazierung aus den Bedingungen des Aufgabentextes ermitteln läßt.

Bemerkung: Als Probe kann man bestätigen, daß bei der angegebenen Plazierung (Erster Volker, Zweiter Uwe, Dritter Thomas) in der Tat (1) wahr sowie (2) und (3) falsch sind. (Eine solche Probe ist zwar zur Sicherheit vor Fehlern nützlich, aber bei dieser Aufgabe nicht zu einer vollständigen Lösung erforderlich, da man dem Aufgabentext entnehmen kann, daß seine sämtlichen Bedingungen erfüllbar sind.)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290713:

I. Wenn Rolfs Aussage zutrifft, dann folgt:

Wäre Rolf vor dem Jahr 1900 geboren, dann müßte die Quersumme seines Geburtsjahres, da sie gleich seinem Alter ist, größer als 89 sein, was für keine Jahreszahl vor 1900 zutrifft. Also wurde Rolf in einem Jahr mit einer Zifferndarstellung $19xy$ geboren. Die Quersumme $1+9+x+y$ ist zugleich Rolfs Alter im Jahr 1989; d.h., es gilt

$$\begin{aligned} 1+9+x+y &= 1989-(1900+10x+y) \\ 10+x+y &= 89-10x-y \\ 11\,x &= 79-2y \\ x &= \frac{79-2y}{11} \end{aligned}$$

Da x eine natürliche Zahl ist, muß $79-2y$ durch 11 teilbar sein. Wie z.B. ein Durchprobieren aller natürlichen Zahlen y mit $0 \leq y \leq 9$ zeigt, ist das nur für $y=1$ der Fall.

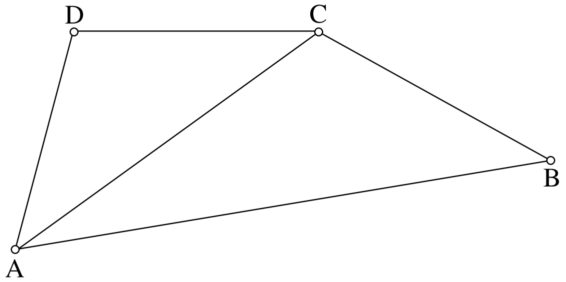
Damit ergibt sich $x=7$. Also kann Rolfs Aussage nur dann zutreffen, wenn er im Jahr 1971 geboren wurde.

II. Bei diesem Geburtsjahr trifft die Aussage in der Tat zu; denn im Jahr 1989 ist Rolf dann 18 Jahre alt, und $1+9+7+1=18$ ist auch die Quersumme der Jahreszahl 1971.

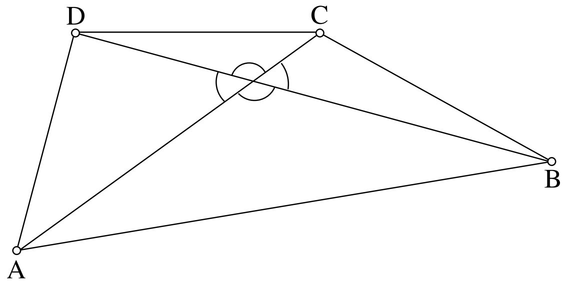
Mit I. und II. ist bewiesen: Es gibt genau ein Jahr als Rolfs Geburtsjahr, für das seine Aussage zutrifft, nämlich das Jahr 1971.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290714:



Klaus hat recht. Wie die erste Abbildung zeigt, sind sämtliche Innenwinkel der Dreiecke ABC und ADC auch Innenwinkel bzw. Teile von Innenwinkeln des Vierecks $ABCD$. Außerdem gibt es keine Innenwinkel bzw. Teile von Innenwinkeln dieses Vierecks, die nicht Innenwinkel der genannten Dreiecke sind.



Anja hat dagegen nicht recht, wie die zweite Abbildung zeigt, liegen nämlich vier der Innenwinkel der durch die beiden Diagonalen entstandenen Dreiecke innerhalb des Vierecks $ABCD$ und bilden zusammen einen Vollwinkel. Folglich hätte Anja von den erhaltenen 720° noch 360° subtrahieren müssen, was als Innenwinkelsumme dann die von Klaus ermittelten 360° ergeben hätte.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission