# 30. Mathematik Olympiade
# 4. Stufe (Bundesrunde)
# Klasse 10
# Saison 1990/1991

Aufgaben und Lösungen

# 30. Mathematik-Olympiade
# 4. Stufe (Bundesrunde)
# Klasse 10
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

## Aufgabe 301041:

Zur Konstruktion eines Vierecks $ABCD$ seien die Streckenlängen $a = 3\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$, $e = \sqrt{27}\,\text{cm}$, $f = \sqrt{108}\,\text{cm}$ und die Winkelgröße $\varphi = 60°$ vorgegeben. Gefordert wird:

(1) Die Seite $AB$ hat die Länge $\overline{AB} = a$.

(2) Die Seite $CD$ hat die Länge $\overline{CD} = c$.

(3) Die Diagonale $AC$ hat die Länge $\overline{AC} = e$.

(4) Die Diagonale $BD$ hat die Länge $\overline{BD} = f$.

(5) Die Diagonalen $AC$ und $BD$ schneiden sich in einem Punkt $S$, für diesen hat der Winkel $\sphericalangle ASB$ die Größe $\varphi$.

(a) Beweisen Sie: Wenn ein Viereck $ABCD$ die geforderten Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Größen $a$, $c$, $e$, $f$, $\varphi$ konstruiert werden.

(b) Beschreiben Sie eine Konstruktion und führen Sie die beschriebene Konstruktion durch!

(c) Beweisen Sie: Wenn ein Viereck $ABCD$ nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen!

(d) Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Viereck $ABCD$ gibt, das die geforderten Bedingungen erfüllt!

## Aufgabe 301042:

Es seien $x_1$, $x_2$ ... $x_n$ Zahlen, von denen jede entweder gleich 1 oder gleich -1 ist. Ferner sei $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$, $x_{n+3} = x_3$; für jedes $i = 1, ..., n$ sei

$$p_i = x_i \cdot x_{i+1} \cdot x_{i+2} \cdot x_{i+3}, \quad \text{und es werde} \quad p_1 + p_2 + ... + p_n = 0 \quad \text{vorausgesetzt.}$$

Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt: $n$ ist durch 4 teilbar.

## Aufgabe 301043A:

Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl $m$ derart gibt, daß es zu jeder positiven natürlichen Zahl $k$ höchstens $m$ natürliche Zahlen $t$ gibt, mit denen die Zahl $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist.

## Aufgabe 301043B:

Im Raum seien vier Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ so gelegen, daß zwischen ihnen folgende Abstände auftreten:

$\overline{AB} = 7{,}2$ cm; $\overline{AC} = 9{,}6$ cm; $\overline{AD} = 15{,}6$ cm; $\overline{BC} = 12{,}0$ cm; $\overline{BD} = 15{,}6$ cm; $\overline{CD} = 15{,}6$ cm.

Ermitteln Sie den Radius $r$ derjenigen Kugel, auf deren Oberfläche diese vier Punkte liegen!

Aufgabe 301044:

Untersuchen Sie, ob es eine für alle reellen Zahlen $x$ definierte Funktion $f$ so gibt, daß für alle natürlichen Zahlen $a$ und $b$ die Gleichung

$$f(a) + f(a+b) - f(a-b) = a^2 + 4b + 2 \text{ gilt!}$$

Aufgabe 301045:

Ein Mathematiklehrer, der demnächst den Flächeninhalt von Kreisen behandeln wollte, stellte folgende vorbereitende Hausaufgabe:

Auf kariertem Papier (quadratische Kästchen) der Seitenlänge 5 mm) sollten die Schüler um einen Eckpunkt eines Kästchens Kreise mit den Radien 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm und 5 cm zeichnen. Zu jedem dieser Kreise sollten sie unter allen Kästchen, die gemeinsame Punkte mit der Kreisfläche haben, diejenigen zählen,

a) die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind,

b) deren Vereinigungsmenge die Kreisfläche vollständig überdeckt.

Offenbar ergibt das Produkt des Flächeninhaltes eines Kästchens mit der in (a) gefundenen Anzahl einen zu kleinen Näherungswert für den Flächeninhalt des Kreises, mit der in (b) gefundenen Anzahl dagegen einen zu großen Näherungswert. Anschließend sollte noch das arithmetische Mittel dieser beiden Näherungswerte (als ein dritter Näherungswert) berechnet werden.

Die Schüler, die sehr sorgfältig gearbeitet hatten, erhielten folgende Ergebnisse:

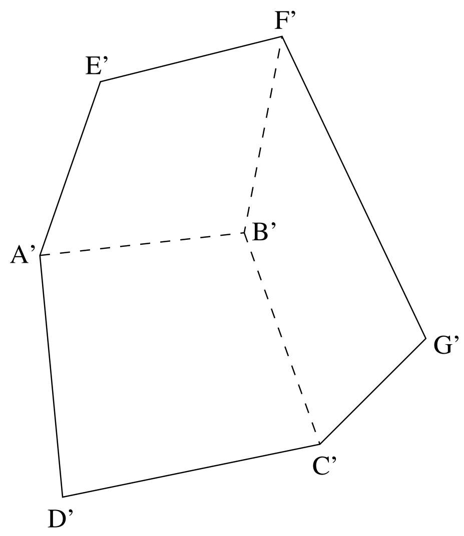
| Radius $r$ in cm | Anzahl der Kästchen bei a) | bei b) | Näherungswert des Verfügung Flächeninhalts in cm$^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 16 | $(1+4):2=2,5$ |
| 2 | 32 | 60 | $(8+15):2=11,5$ |
| 3 | 88 | 132 | $(22+33):2=27,5$ |
| 4 | 164 | 224 | $41+56):2=48,5$ |
| 5 | 276 | 344 | $69+86):2=77,5$ |

Nun wurde bemerkt, daß jeweils die Maßzahlen des dritten Näherungswertes sämtlich nach dem Komma die Ziffer 5 haben. Trifft das auch bei der Wahl aller Radien $r$ zu, deren Maßzahlen in cm die natürlichen Zahlen größer als 5 sind?

Aufgabe 301046:

Das Arbeitsblatt zeigt die Bilder $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, $F'$, $G'$ von sieben Eckpunkten $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ eines Körpers bei Parallelprojektion. Dieser Körper hat außerdem noch einen Eckpunkt $H$; die Oberfläche des Körpers besteht aus sechs ebenen Vierecken $ABCD$, $ABFE$, $ADHE$, $BCGF$, $CDHG$, $EFGH$. Die Kanten $AB$, $BC$, $BF$ werden (bei der Sicht auf die Zeichenebene in Projektionsrichtung) von davor liegenden Flächen verdeckt; daher sind $A'B'$, $B'C'$, $B'F'$ gestrichelt gezeichnet.

Konstruieren Sie unter diesen Voraussetzungen das Bild $H'$ des Punktes $H$ und die Bilder der von $H$ ausgehenden Kanten! Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion! (siehe Abbildung)



F'
E'
B'
A'
G'
C'
D'

# 30. Mathematik-Olympiade
## 4. Stufe (Bundesrunde)
## Klasse 10
## Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 301041:

(a) Wenn ein Viereck ABCD die geforderten Bedingungen (1) bis (5) erfüllt, so folgt:
Für den Schnittpunkt C' der Parallelen g' durch C zur Geraden g durch A, B und der Parallelen h' durch B zur Geraden durch A, C ist ABC'C ein Parallelogramm. Daher ist $\overline{BC'} = \overline{AC}$, nach (3) also BC' = e. Weiter ist $BC' \| AC$, nach dem Wechselwinkelsatz und nach (5) also $\overline{\sphericalangle DBC'} = \overline{\sphericalangle ASB} = \varphi$. Damit und mit (4), also $\overline{BD} = f$, sind im Dreieck DBC' die Längen zweier Seiten und die Größe des eingeschlossenen Winkels gegeben.
Ferner ist $\overline{CC'} = \overline{AB}$, nach (1) also $\overline{CC'} = a$, und nach (2) ist $\overline{CD} = c$. Daher liegt C auf dem Kreis $k_1$ um C' mit a und auf dem Kreis $k_2$ um D mit c.
Der Punkt A liegt auf g und h, und nach (5) haben die Strecken AC und BD einen Schnittpunkt S miteinander.
Damit ist bewiesen, dass ABCD durch folgende Konstruktin erhalten werden kann:

(b) [1] Man konstuiert ein Dreieck DBC' mit $\overline{BD} = f$, $\overline{BC'} = e$, $\overline{\sphericalangle DBC'} = \varphi$.

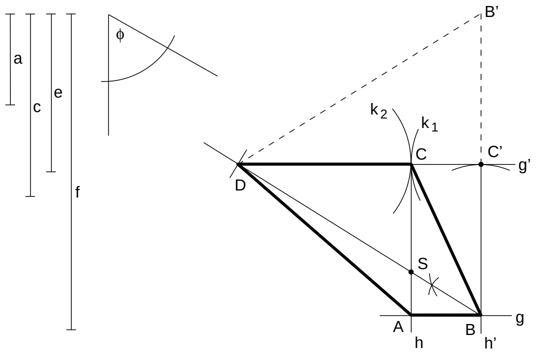
[2] Man konstruiert den Kreis $k_1$ um C' mit a und den Kreis $k_2$ um D mit c.

[3] Man wählt einen gemeinsamen Punkt von $k_1$ und $k_2$ als C, falls für ihn folgendes gilt: Schneiden sich die Parallele g durch B zur Geraden g' durch C, C' und die Parallele h durch C zur Geraden h' durch B, C' in A, so schneiden die Strecken AC und BD einander.

Durchführung der Konstruktion : Abb. L301042, ohne gestrichelte Linien.

(c) Wenn ein Viereck ABCD nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann, so folgt:
Nach den Konstruktionsschritten [1] und [2] ist $\overline{BD} = f$ und $\overline{CD} = c$, also sind (4) und (2) erfüllt. Nach [3] ist ABC'C ein Parallelogramm. Daher und nach [1],[2] ist $\overline{AC} = \overline{BC'} = e$ und $\overline{AB} = \overline{CC'} = a$, also sind (3) und (1) erfüllt. Nach der Wahl von C in [3] schneiden sich AC und BD in einem Punkt S, und wegen $AC \| BC'$ folgt nach dem Wechselwinkelsatz sowie nach [1], dass $\overline{\sphericalangle ASB} = \overline{\sphericalangle DBC'} = \varphi$ gilt, also auch (5) erfüllt ist.

(d) Der Konstruktionsschritt [1] ist nach dem Kongruenzsatz sws bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Wegen $\overline{BD} = \sqrt{108}$ cm $= 2 \times \sqrt{27}$ cm $= 2 \times \overline{BC'}$ und $\overline{\sphericalangle DBC'} = 60°$ wird dabei DC' in einem gleichseitigen Dreieck BB'D (siehe Abb. L301041, gestrichelte Linien) Seitenhalbierende und zugleich Höhe, und es folgt $\overline{DC'} = \overline{BC'} \times \sqrt{3} = \sqrt{27} \times \sqrt{3}$ cm $= 9$ cm $= a + c$. Also haben die in [2] konstruierten Kreise $k_1$ , $k_2$ genau einen Punkt, ihren Berührungspunkt C, gemeinsam, und D liegt auf der Verlängerung von C'C über C hinaus. Daher (und weil B im Parallelogramm ABC'C der Ecke C gegenüberliegt) schneiden sich BD und AC. Also führt [3] auf eindeutig bestimmte Punkte C und A.
Somit gibt es bis auf Kongruenz genau ein Viereck ABCD, das (1) bis (5) erfüllt.




Bemerkungen:
1. Sogleich bei dem in (a) geforderten Nachweis und dementsprechend auch in (b) bis (d) können die Beziehungen $f = 2e$ und $e\sqrt{3} = a + c$ (gezeigt und dann) genutzt werden, aus denen folgt, dass im Dreieck mit den Seitenlängen e, a + c, f die jeweils gegenüberliegenden Innenwinkel die Größen 30°, 60°($= \varphi$), 90° haben.
2. Die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für den gemeinsamen Punkt C der Kreise $k_1$ , $k_2$ (und damit für das Viereck ABCD) ist zwar auch einer mit idealer Genauigkeit ausgeführten Konstruktion zu entnehmen. Da jedoch selbst kleinste Abweichungen von idealer Genauigkeit die Enscheidung, ob $k_1$ , $k_2$ keinen, genau einen gemeinsamen Punkt oder genau zwei Schnittpunkte haben, wieder völlig offenlassen, ist bei dieser Aufgabe zur vollständigen Lösung von (d) ein theoretisch geführter Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis erforderlich. Für einen solchen Beweis kann übrigens auch - im Sinne der vorigen Bemerkung - eine konstruktive Vorgabe der Längen e und f (z.B. als ganze bzw. halbe Seitenlänge) eines gleichseitigen Dreiecks der Höhenlänge a + c) herangezogen werden. Möglich sind natürlich auch noch andere Hilfsmittel, z.B. der Trigonometrie oder der Nutzung von Koordinaten.

*Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (0)*

Lösung 301042:
Nach Voraussetzung ist auch jede der Zahlen $p_1$, $p_2$,...,$p_n$ entweder gleich 1 oder gleich -1. Wegen $p_1 + p_2 + ... + p_n = 0$ ist die Anzahl m der $p_j = 1$ gleich der Anzahl der $p_k = -1$. Also gilt n = 2m.
Mit dieser Anzahl m gilt einerseits $p_1 \times p_2 \times ... \times p_n = (-1)^m$. Andererseits enthält dieses Produkt

$$p_1 \times p_2 \times ... \times p_n = x_1x_2x_3x_4 \times x_2x_3x_4x_5 \times ... \times x_nx_1x_2x_3$$

jeden Faktor $x_i$ genau 4 mal (nämlich innerhalb der Teilprodukte $x_1x_2x_3x_4$,..., $x_nx_1x_2x_3$ genau einmal an erster, genau einmal an zweiter, genau einmal an dritter und genau einmal an vierter Stelle); also ist $p_1 \times p_2 \times ... \times p_n = 1$. Daher ist m gerade und folglich n=2m durch 4 teilbar, w.z.b.w.

*Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (0)*

Lösung 301043A:
Eine derartige Zahl m gibt es nicht; im Gegenteil gilt: Für jede natürliche Zahl m gibt es eine natürliche Zahl $k > 0$ und zu ihr mehr als m natürliche Zahlen t, mit denen $\sqrt{t + k \times \sqrt{t}}$ rational ist.
Zum Beweis genügt es, für jede natürliche Zahl $m > 0$ ein Beispiel einer natürlichen Zahl $k > 0$ und paarweise voneinander verschiedener Zahlen $t_1, t_2, ...t_{m+1}$ anzugeben und mit ihnen die Zahlen $\sqrt{t_i + k \times \sqrt{t_i}}$ $(i = 1, ..., m + 1)$ als rational nachzuweisen. Ein solches Beispiel bilden die Zahlen

$$k = (2^2 - 1) \times (3^2 - 1) \times ... \times ((m + 1)^2 - 1),$$

$$t_1 = 0,$$

$$t_i = \frac{k^2}{(i^2-1)^2} \text{ (i=2,...,m+1).}$$

Sie sind nämlich sämtlich natürliche Zahlen; k ist positiv; es gilt $t_2 > t_3 > ... > t_{m+1} > 0$, also sind $t_1, ..., t_{m+1}$ paarweise voneinander verschieden, und die Zahlen

$$\begin{aligned} \sqrt{t_1 + k \times \sqrt{t_1}} &= 0, \\ \sqrt{t_i + k \times \sqrt{t_i}} &= \sqrt{\tfrac{k^2}{(i^2-1)^2} + k \times \tfrac{k}{i^2-1}} \\ &= \tfrac{k}{i^2-1} \times \sqrt{1 + (i^2-1))} \\ &= \tfrac{k}{i^2-1} \times i \ (i = 2, ..., m+1) \end{aligned}$$

sind (natürliche, also) rationale Zahlen.
Ein anderes Beispiel bilden die Zahlen $k = 2^{2m+1}$ und $t_i = (2^{2m-1} - 2^i)^4$ $(i = 0, ..., m)$, wie aus $t_0 > ... > t_m$ und $\sqrt{t_i + k \times \sqrt{t_i}} = \sqrt[4]{t_i} \times \sqrt{\sqrt{t_i} + k} = (2^{2m-1} - 2^i)(2^{2m-1} + 2^i)$ folgt. Zu solchen Beispielen gelangt man z.B., indem man $x = \sqrt{t + k \times \sqrt{t}}$ als $x^2 + \frac{k^2}{4} = (\sqrt{t} + \frac{k}{2})^2$ schreibt und mit dem Ansatz $x = p^2 - q^2$, $\frac{k}{2} = 2pq$, $\sqrt{t} + \frac{k}{2} = p^2 + q^2$ pythagoreischer Tripel bei passender Wahl von k dann m ganzzahlige $t = (p - \frac{k}{4p})^4$ erhält.

*Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (0)*

Lösung 301043B:

Wegen $\overline{AB} = 3 \cdot 2,4$ cm; $\overline{AC} = 4 \cdot 2,4$ cm; $\overline{BC} = 5 \cdot 2,4$ cm und $3^2 + 4^2 = 5^2$, also $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$, ist das Dreieck $ABC$ nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras bei $A$ rechtwinklig.
Dreht man, ausgehend von einem Netz $ABCD_1D_2D_3$ des Tetraeders $ABCD$ (siehe Abb. L 301043B), die Dreiecke $BCD_1, CAD_2$ und $ABD_3$ um $BC$, $CA$ bzw. $AB$ so, dass $D_1, D_2$ und $D_3$ im Punkt $D$ zusammentreffen, so beschreiben dabei $D_1, D_2$ und $D_3$ Kreisbögen $k_1, k_2, k_3$.

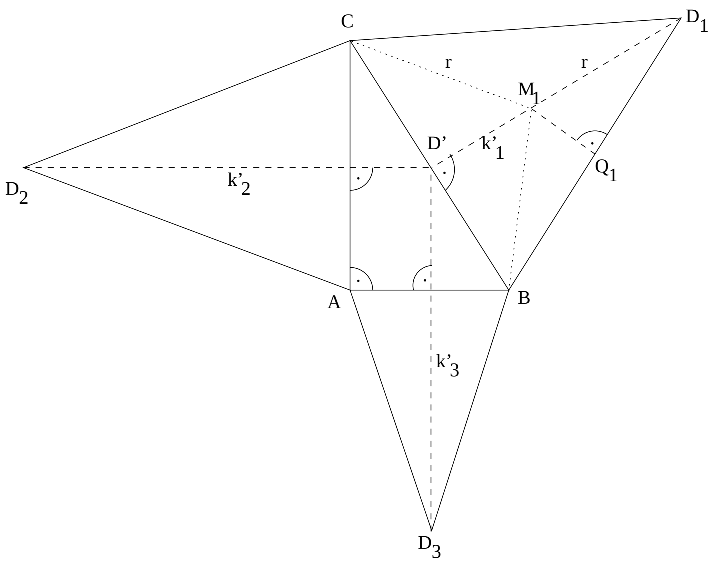



Bild 1. Abb. L 301043B

Deren Bilder $k'_1, k'_2, k'_3$ bei senkrechter Projektion auf die Zeichenebene sind geradlinig und senkrecht auf $BC$, $CA$ bzw. $AB$. Da die Dreiecke $BCD_1$, $CAD_2$, $ABD_3$ gleichschenklig sind, gehen $k'_1$, $k'_2$, $k'_3$ durch die Mittelpunkte von $BC$, $CA$ bzw. $AB$; d.h. sie sind die Mittelsenkrechten des Dreiecks $ABC$. Ihr Schnittpunkt, das Bild $D'$ von $D$ bei senkrechter Projektion auf die Zeichenebene, ist also der Umkreismittelpunkt von $ABC$, und dieser ist nach der Umkehrung des Thalessatzes der Mittelpunkt der Hypotenuse $BC$.
Da der Mittelpunkt $M$ derjenigen Kugel, auf deren Oberfläche $A$, $B$, $C$ und $D$ liegen, insbesondere gleiche Abstände $r$ zu $A$, $B$ und $C$ hat, liegt er auf der Senkrechten, die im Umkreismittelpunkt von $ABC$ auf der Zeichenebene errichtet wird; d.h. $M$ liegt auf $D'D$ und ist folglich der Umkreismittelpunkt des Dreiecks

$BCD$ (Abb. L 301043B zeigt seine Lage $M_1$, wenn das Dreieck $BCD$ in die Lage $BCD_1$ gedreht ist). Damit und mit $\overline{BD'} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 6$ cm folgt nach dem Satz des Pythagoras einerseits

$$\overline{D'D}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BD'}^2,$$

wegen $\overline{BD} = 13 \cdot 1,2$ cm ; $\overline{BD'} = 5 \cdot 1,2$ cm und $13^2 - 5^2 = 12^2$ also

$$\overline{DD'} = 12 \cdot 1,2 \text{ cm};$$

andererseits folgt

$$(\overline{D'D} - r)^2 + \overline{BD'}^2 = r^2,$$

$$(\overline{D'D})^2 + \overline{BD'}^2 - 2r \cdot \overline{D'D} = 0,$$

$$r = \frac{\overline{BD}^2}{2 \cdot \overline{D'D})} = \frac{(13 \cdot 1,2)^2}{24 \cdot 1,2} \text{ cm} = \frac{13^2 \cdot 0,1}{2} \text{ cm} = 8,45 \text{ cm}.$$

(Die Formel $r \cdot \overline{D'D} = \frac{\overline{BD}}{2} \cdot \overline{BD}$ folgt auch, weil $M$ auf der Mittelsenkrechen $QM$ von $BD$ liegt und daher ΔMQD ∼ ΔBD'D ist.)
In einem <u>zweiten Lösungweg</u> mit Koordinaten kann man etwa $A$, $B$, $C$, $D$ mit $(0;0;0)$, $(7,2;0;0)$, $(p;q;0)$, $(u;v;w)$ $(q > 0,\ w > 0)$ ansetzen und aus $\overline{AC} = 9,6$; $\overline{BC} = 12$; $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = 15,6$ fünf Gleichungen für $p$, $q$, $u$, $v$, $w$ gewinnen. Sie ergeben $p = 0$;
$q = 9{,}6$; $u = 3{,}6$; $v = 4{,}8$; $w = 14{,}4$. Für den Mittelpunkt $(x;y;z)$ und den Radius $r$ der Kugel ergeben dann $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MD} = r$ vier Gleichungen für $x$, $y$, $z$, $r$. Sie führen auf $x = 3{,}6$; $y = 4{,}8$; $z = 5{,}95$ und den gesuchten Wert $r = 8{,}45$.

*Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (0)*

<u>Lösung 301044:</u>

*Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)*

<u>Lösung 301045:</u>

*Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)*

<u>Lösung 301046:</u>

*Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)*

## Quellenverzeichnis

**(0)** Unbekannt