31. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Saison 1991/1992

Aufgaben und Lösungen

31. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310621:

a) Eine sechsstellige Zahl soll mit den Ziffern 1, 1, 2, 2, 3, 3 geschrieben werden. Die Reihenfolge dieser sechs Ziffern soll so gewählt werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

   (1) Zwischen den beiden Ziffern 1 soll genau eine andere Ziffer stehen.

   (2) Zwischen den beiden Ziffern 2 sollen genau zwei andere Ziffern stehen.

   (3) Zwischen den beiden Ziffern 3 sollen genau drei andere Ziffern stehen.

b) Eine achtstellige Zahl soll mit den Ziffern 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 geschrieben werden. Für die Reihenfolge soll außer den Bedingungen (1), (2), (3) auch die folgende Bedingung erfüllt werden:

   (4) Zwischen den beiden Ziffern 4 sollen genau vier andere Ziffern stehen.

Gib zu a) und zu b) jeweils alle Zahlen an, die die Bedingungen erfüllen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 310622:

Zwischen vier Mannschaften A, B, C, D wurde ein Fußballturnier ausgetragen. Jede Mannschaft spielte genau einmal gegen jede andere. Für ein gewonnenes Spiel gab es zwei Punkte, für ein unentschiedenes einen Punkt und für ein verlorenes Spiel keinen Punkt. Das Spiel zwischen den Mannschaften C und D endete als einziges unentschieden. Keine zwei Mannschaften erreichten die gleiche Punktzahl. Die Mannschaft B wurde Letzter.

a) Untersuche, ob durch diese Informationen eindeutig bestimmt ist, welchen Platz die Mannschaft A belegte und wieviel Punkte sie erreichte! Wenn das der Fall ist, gib beides an!

b) Sind die gegebenen Informationen auch ausreichend, um den genauen Endstand (Plazierungen der einzelnen Mannschaften und jeweils erreichte Punkte) des Turniers angeben zu können? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 310623:

Wieviele natürliche Zahlen gibt es insgesamt, die

a) Teiler von 256 sind,

b) Teiler von $2 \cdot 256$ sind,

c) Teiler von $256 \cdot 256$ sind?

Erkläre zu jeder deiner drei Antworten, wie du sie gefunden hast!

Aufgabe 310624:

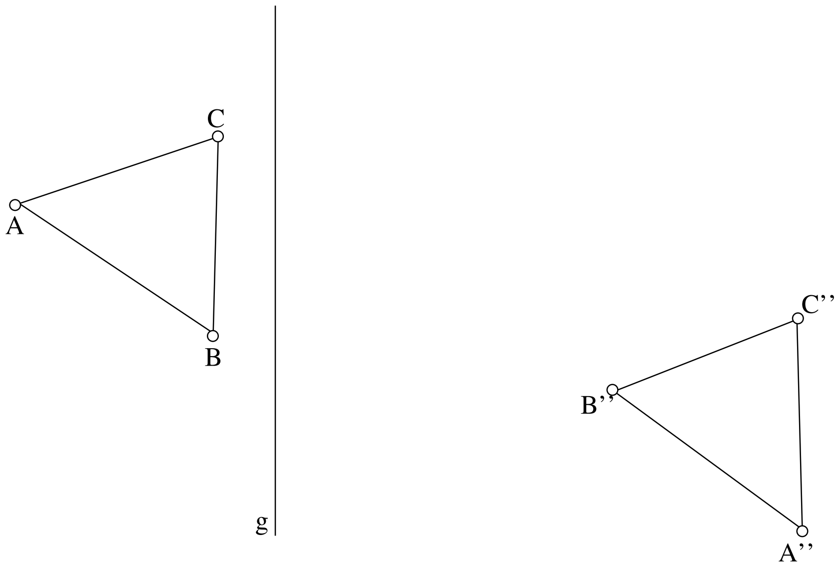
Auf dem Arbeitsblatt befinden sich zwei Dreiecke ABC, $A''B''C''$ und eine Gerade g. Zu konstruieren ist

1. das Bild $A'B'C'$ von ABC bei der Spiegelung an g,
2. der Drehpunkt M derjenigen Drehung, die $A'B'C'$ in $A''B''C''$ überführt.

a) Fertige auf dem Arbeitsblatt eine Konstruktionszeichnung an, die alle benötigten Hilfslinien enthält!

b) Beschreibe deine Konstruktion!

Eine Begründung wird nicht verlangt.



31. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 310621:

Die Bedingungen werden genau durch die Zahlen

a) 231213 und 312132,

b) 23421314 und 41312432

erfüllt.

Bemerkung: Die gesuchten Zahlen können durch "systematisches Probieren" gefunden werden; d.h., man kann z.B. folgendermaßen zum Nachweis gelangen, daß alle gesuchten Zahlen ermittelt sind (die Angabe eines solchen Nachweises wird nicht vom Schüler verlangt):

a) An die zwei Stellen zwischen den Ziffern $2 \cdot \cdot 2$ können weder die beiden Ziffern 1 noch die beiden Ziffern 3 kommen. Also enthält die gesuchte Zahl die Teilfolge 2132 (oder umgekehrt 2312). Nun kann die Ziffer 1 nur so hinzugefügt werden, daß 12132 (bzw. die umgekehrte Folge) entsteht. Daran anschließend ist nur 312132 (bzw. umgekehrt) möglich.

b) An den vier Stellen zwischen den Ziffern $4 \cdot \cdot \cdot \cdot 4$ muß eine der drei Ziffern 1, 2, 3 zweifach vorkommen. Die 3 kann dies nicht sein (da zwischen zwei Ziffern 3 dann nicht genug Platz wäre). Wäre es die 2, so müßte sie an die Stellen $42 \cdot \cdot 24$ kommen; zwischen den Ziffern 2 könnte dann keine Ziffer 1 stehen, also müßten dort beide Ziffern 3 stehen, was nicht möglich ist. Somit kommt nur $41 \cdot 1 \cdot 4$ (oder umgekehrt) in Betracht.

   Nun würde die Eintragung $41 \cdot 134$ aber $41 \cdot 134 \cdot \cdot 3$ verlangen, obwohl nur noch zwei Ziffern 2 einzutragen wären. Also kann nur mit $41 \cdot 124$ und anschließend eindeutig mit $41 \cdot 124 \cdot 2$ sowie mit 41312432 (bzw. umgekehrt 23421314) fortgesetzt werden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 310622:

a) In eine Tabelle sei zunächst das unentschiedene Spiel C gegen D eingetragen. Aus der Information, daß dies das einzige unentschiedene Spiel war, folgt: Alle anderen Punktzahlen sind 0 oder 2.

   Hätte A gegen C und D verloren (Abb. L 310622 a), so müßte wegen der von C und D erreichten unterschiedlichen Punktzahlen B gegen C und D unterschiedlich gespielt haben und hätte damit mindestens so viele Punkte wie A erreicht; dieser Fall scheidet also aus.

   Hätte A gegen B und eine der Mannschaften C, D verloren (ohne Beschränkung der Allgemeinheit gegen C; Abb. L 310622 b), so hätte schon deswegen B mindestens so viele Punkte wie A.

	A	B	C	D
A	-		0	0
B		-		
C	2		-	1
D	2		1	-

Abb. L 310622 a

	A	B	C	D
A	-	0	0	
B	2	-		
C	2		-	1
D			1	-

Abb. L 310622 b

Also hat A mindestens zwei Spiele gewonnen.

Hätte A gegen C und D gewonnen (Abb. L 310622 c), so müßte B gegen C und D unterschiedlich gespielt haben und hätte damit mehr Punkte als die von B besiegte dieser beiden Mannschaften. Also folgt: A hat gegen B und genau eine der Mannschaften C, D gewonnen, o.B.d.A. gegen C (Abb. L 310622 d).

	A	B	C	D
A	-		2	2
B		-		
C	0		-	1
D	0		1	-

Abb. L 310622 c

	A	B	C	D
A	-	2	2	0
B	0	-		
C	0		-	1
D	2		1	-

Abb. L 310622 d

Weiter folgt: B hat weniger Punkte als A, also höchstens ein Spiel gewonnen. Hätte B gegen C und D dieselben Ergebnisse wie A gegen C und D erreicht, so ergäbe das 2 Punkte für B und 1 Punkt für die Verlierermannschaft. Hätte aber B gegen C, D entgegengesetzte Ergebnisse wie A, so hätten C und D beide 3 Punkte.

Also kann B überhaupt kein Spiel gewonnen haben, eine der Mannschaften C, D hat 3, die andere 5 Punkte.

Daher hat sich eindeutig ergeben: A belegte mit 4 Punkten den zweiten Platz.

b) Da beide Ergebnistabellen Abb. L 310622 e, f allen Informationen entsprechen, jedoch voneinander abweichende Endstände angeben, folgt: Die Informationen sind nicht ausreichend, um den genauen Endstand des Turniers angeben zu können.

	A	B	C	D
A	-	2	2	0
B	0	-	0	0
C	0	2	-	1
D	2	2	1	-

Abb. L 310622 e

	A	B	C	D
A	-	2	0	0
B	0	-	0	0
C	2	2	-	1
D	0	2	1	-

Abb. L 310622 f

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 310623:

a) Man stellt fest: 256 ist durch 2 teilbar; es gilt $256 : 2 = 128$. Weiter gilt $128 : 2 = 64$. Indem man so fortgesetzt die Teilbarkeit durch 2 feststellt, ergibt sich

$$256 = 2 \cdot 128 = 2 \cdot 2 \cdot 64 = ... = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Also ist eine natürliche Zahl genau dann Teiler von 256, wenn sie entweder gleich 1 oder gleich dem Produkt von einer Anzahl Faktoren 2 ist, wobei diese Anzahl höchstens 8 beträgt. Für diese Anzahl gibt es somit genau 8 Möglichkeiten. Daher gibt es insgesamt 9 natürliche Zahlen, die Teiler von 256 sind.

Bemerkungen:

1. Man kann in der Darstellung zur Potenzschreibweise übergehen ($256 = 2 \cdot 128 = 2^2 \cdot 64 = ... = 2^8$), die Gleichung $256 = 2^8$ auch kürzer, z.B. unter Verwendung von Potenzgesetzen, gewinnen sowie die Teiler als die Zahlen 1 und 2^n ($n = 1, ..., 8$) kennzeichnen. Statt einer solchen "abstrakt" über die Beschreibung der Faktorenanzahl bzw. Exponenten erfolgten Aufzählung ist es natürlich auch möglich, die Teiler einfach konkret anzugeben.
2. Eine - wie immer gestaltete - Beschreibung von Teilern genügt allein nicht; vielmehr muß aus der Darstellung der Nachweis hervorgehen, daß die gesamte Teileranzahl ermittelt wurde. Entsprechendes gilt für b) und c):

b) Aus $2 \cdot 256 = 2^9$;

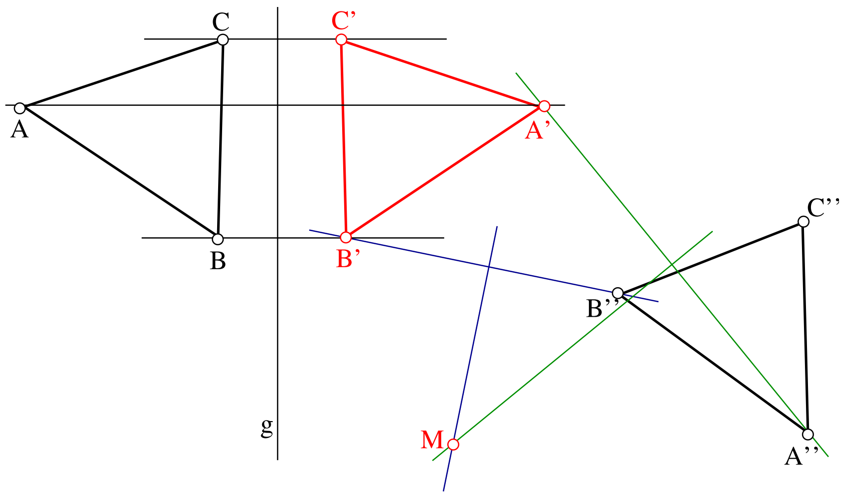
c) aus $256 \cdot 256 = 2^{16}$ folgt: Es gibt insgesamt 10 bzw. 17 natürliche Zahlen, die Teiler von $2 \cdot 256$ bzw. von $256 \cdot 256$ sind.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 310624:
Die Abbildung zeigt eine Konstruktion. Sie kann folgendermaßen beschrieben werden:

(1) Man konstruiert die Lote AA_1 , BB_1 , CC_1 von A, B, C auf g und verlängert sie über A_1, B_1 bzw. C_1 hinaus um ihre eigene Länge bis A', B', C'.

(2) Man konstruiert die Mittelsenkrechten m_1, m_2 von $A'A''$ bzw. bzw. $B'B''$ und ihren Schnittpunkt M.



Bemerkungen: Statt (2) können auch zwei andere Mittelsenkrechten konstruiert werden (oder zu Kontrollzwecken alle drei: von $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$).

Die Konstruktion der Lote in (1) kann auch unter Verwendung des Zeichendreiecks erfolgen, wobei keine Kreisbögen als Hilfslinien benötigt werden.

Die Konstruktion des Bildpunktes bei einer Geradenspiegelung kann auch - ohne weitere Aufgliederung in zwei Schritte (Lot, Verlängerung) - als ein Konstruktionsschritt beschrieben sein. Andererseits kann zum Konstruieren von Loten, Verlängerungen, Mittelsenkrechten eine ausführlichere Aufzählung von Hilfslinien vorgenommen werden; jedoch ist dies nicht vom Schüler zu fordern.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Quellenverzeichnis

(31) Broschüre vom Volk und Wissen Verlag (VWV)