31. Mathematik Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Saison 1991/1992

Aufgaben und Lösungen

31. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 311041:

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen k, für die die folgende Aussage (1) wahr ist:

(1) Für jedes Paar $(a; b)$ reeller Zahlen a, b gilt $a^2 + b^2 \geq k \cdot ab$

Aufgabe 311042:

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck; auf der Seite BC sei D ein beliebiger Punkt zwischen B und C; auf CA sei E ein beliebiger Punkt zwischen C und A; auf AB sei F ein beliebiger Punkt zwischen A und B. Ferner sei k_A der Kreis durch A, E, F; es sei k_B der Kreis durch B, F, D; und es sei k_C der Kreis durch C, D, E.

Man beweise, daß bei allen Lagemöglichkeiten, die es unter diesen Voraussetzungen für A, B, C, D, E, F, k_A, k_B, k_C gibt, die drei Kreise k_A, k_B, k_C stets einen Punkt gemeinsam haben.

Aufgabe 311043A:

Es sei f eine Funktion, die für alle positiven ganzen Zahlen n und nur für diese definiert sei und deren sämtliche Funktionswerte $f(n)$ ganzzahlig sind. Ferner werde vorausgesetzt, daß für alle positiven ganzen Zahlen m, n die Gleichung

$$f\left(f(m) + f(n)\right) = m + n \quad \text{gilt.}$$

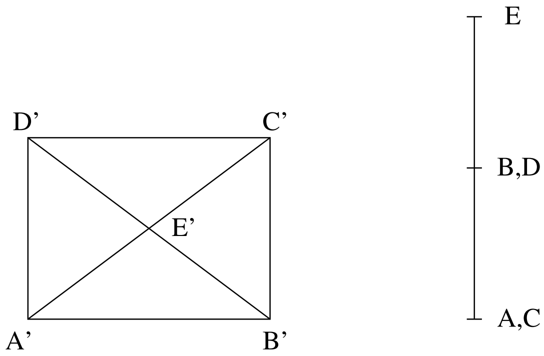
Man ermittle alle diejenigen Zahlen, die als Funktionswert $f(1\,992)$ bei einer solchen Funktion f vorkommen können.

Aufgabe 311043B:

In der Abbildung ist die senkrechte Eintafelprojektion eines ebenflächig begrenzten Körpers mit zugehörigem Höhenmaßstab dargestellt. $A'B'C'D'$ ist ein Rechteck, E' sein Diagonalenschnittpunkt; für die im Höhenmaßstab gezeigten Höhen (über A und C) gilt: Die Höhe von E ist das Zweifache der Höhe von B und D. Vorausgesetzt wird ferner, daß der Körper genau die Punkte A, B, C, D, E als Ecken hat.

a) Untersuchen Sie, ob es (bis auf Verschiebung senkrecht zur Zeichenebene) genau einen Körper gibt, auf den diese Angaben zutreffen!

b) Zeichnen Sie für jeden derartigen Körper eine Darstellung in Dreitafelprojektion, bei der der Grundriß aus der Abbildung übernommen ist! Im Auf- und Seitenriß sind alle Kanten des betreffenden Körpers zu zeichnen. Dabei ist in üblicher Weise zu unterscheiden zwischen sichtbaren Linien (durchgezogen) und verdeckten Linien (gestrichelt, sofern nicht genau hinter sichtbaren *Linien* verdeckt); die Abbildung selbst ist in dieser Weise aufzufassen.



Aufgabe 311044:

Für jede natürliche Zahl n sei $\overline{n}$ diejenige Zahl, die im Ziffernsystem mit der Basis 10 durch dieselbe Ziffernfolge dargestellt wird wie n im Ziffernsystem mit der Basis 9.

Man zeige, dass es eine natürliche Zahl k gibt, so dass für jedes Paar $(m; n)$ natürlicher Zahlen mit $m > 100$ und $n - m > k$ die Ungleichung

$$n - m < \overline{n} - \overline{m} \quad \text{gilt.}$$

Man ermittle auch die kleinste derartige natürliche Zahl k.

Aufgabe 311045:

Kann jedes Dreieck in genau 8 spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden?

Aufgabe 311046:

Es sei q die größere der beiden Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Man ermittle die letzte Ziffer (Einerstelle) in der dekadischen Zifferndarstellung der Zahl $[q^{1\,992}]$.

Hinweis: Ist z eine relle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g für die $g \leq z < g+1$ gilt, mit $g = [z]$ bezeichnet.

31. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 311041:

Lösung 311042:

Lösung 311043A:

Lösung 311043B:

Lösung 311044:

Lösung 311045:

Lösung 311046:

Es sei p die kleinere der beiden Lösungen der quadratischen Gleichung.

1. Beobachtung: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : p^n + q^n \in \mathbb{Z}$. Mehr noch: $p^n + q^n$ lässt sich rekursiv durch eine Differenzengleichung berechnen. Damit erschlagen wir auch gleich die Ganzzahligkeit.

2. *Beweis:*
   Es gilt $p^0 + q^0 = 2$ und $p^1 + q^1 = 4$ (Vieta).
   Weil p und q Lösungen der quadratischen Gleichung sind, gilt $p^2 = 4p - 1$ bzw. $q^2 = 4q - 1$. Damit erhalten wir Rekursionsbeziehung

$$\begin{aligned} p^{n+2} + q^{n+2} &= p^n \cdot p^2 + q^n \cdot q^2 \\ &= p^n \cdot (4p - 1) + q^n \cdot (4q - 1) \\ &= 4 \cdot (p^{n+1} + q^{n+1}) - (p^n + q^n) \end{aligned}$$

3. Man sieht sofort, dass die Potenzsummen immer ganzzahlig bleiben, wenn nur $p^1 + q^1$ und $p^0 + q^0$ ganzzahlig sind. Nun können wir ganz bequem die nächsten Potenzen ausrechnen:

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= 4 \cdot 4 - 2 = 14 \\ p^3 + q^3 &= 14 \cdot 4 - 4 = 52 \\ p^4 + q^4 &= 52 \cdot 4 - 14 = 194 \\ p^5 + q^5 &= 194 \cdot 4 - 52 = 724 \end{aligned}$$

4. Da wir natürlich nicht gerne im Kopf rechnen, vermuten wir an dieser Stelle einfach, dass die Einerstellen die Periode $(2, 4, 4)$ durchlaufen. Das können wir uns wie folgt veranschaulichen: Alle Rechnung stimmen weiterhin, wenn wir modulo 10 rechnen. In unserer Folge hängt für jedes n das n. Glied nur vom $(n-1)$. und vom $(n-2)$. ab. Wenn irgendwo auf zwei Glieder mit den Resten 2 und 4 ein Glied mit Rest 4 folgt, dann stimmt das automatisch für alle aufeinanderfolgenden Glieder mit Resten 2 und 4. Im konkreten Fall haben wir die folgenden Abhängigkeiten:
$$2, 4 \to 4 \qquad 4, 4 \to 2 \qquad 4, 2 \to 4$$

5. Die Reste der Folge $(p^n + q^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durchlaufen also die Werte $2, 4, 4, 2, 4, 4, 2, 4, 4, \ldots$ und da $1992 \equiv 0 \mod 3$ ergibt sich $p^{1992} + q^{1992} \equiv 2 \mod 10$

6. Was folgert man daraus für die Einerstelle von q^{1992} ? Wir haben Glück, dass $p = 2 - \sqrt{3}$ vom Betrage her kleiner als 1 ist. Außerdem ist es positiv.

   Beweis:
$$\begin{array}{ccccc} 4 > 3 & \Rightarrow & 2 > \sqrt{3} & \Rightarrow & 2 - \sqrt{3} > 0 \\ 1 < 3 & \Rightarrow & \sqrt{1} < \sqrt{3} & \Rightarrow & 2 - \sqrt{3} < 1 \end{array}$$

   Daher lässt sich p^{1992} abschätzen mit $0 < p^{1992} < 1$. Deshalb muss q^{1992} die Einerstelle 1 besitzen.

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann