33. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 6
Saison 1993/1994

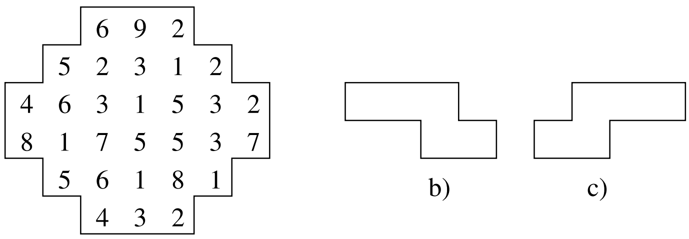
Aufgaben und Lösungen

33. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330611:

Zerlege die Figur aus Abb. a) so in Teilstücke, daß jedes Teilstück die Gestalt von Abb. b) oder von Abb. c) hat und daß auf jedem Teilstück die Summe der Zahlen 20 beträgt!



a) b) c)

Aufgabe 330612:

Zwei Zahlen sollen die Summe 2 028 haben. Dividiert man die erste Zahl durch 28, so soll sich dasselbe ergeben wie bei Division der zweiten Zahl durch 128.

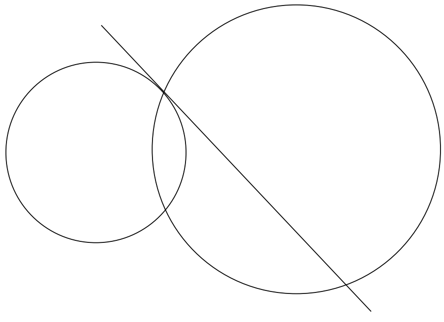
Zeige, daß die beiden Zahlen durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind; finde sie und bestätige, daß sie die Forderungen erfüllen!

Aufgabe 330613:

Karin zeichnet zwei Kreise, die sich in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Dann zeichnet sie eine Gerade und zählt an der entstandenen Figur,

1. wieviele Punkte es gibt, die als gemeinsamer Punkt (Schnitt- oder Berührungspunkt) von mindestens zwei der drei gezeichneten Linien vorkommen,
2. wieviele Gebiete es gibt, die von Teilen der Linien vollständig eingeschlossen werden und in ihrem Innern frei von anderen Linienteilen sind.

Die Abbildung zeigt als Beispiel eine Figur mit 3 Punkten und 4 Gebieten.



Zeichne Figuren mit

a) 2 Punkten, 4 Gebieten;

b) 4 Punkten, 4 Gebieten;

c) 4 Punkten, 5 Gebieten!

Anregung: Stelle fest, welche Punkt- und Gebietszahlen überhaupt möglich sind! Was ändert sich, wenn auch Kreise zugelassen werden, die sich berühren?

Aufgabe 330614:

Ist n eine natürliche Zahl, so bezeichnet man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n mit dem Zeichen $n!$ (gelesen: "n - Fakultät"). Beispielsweise ist $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Wie lauten die letzten drei Ziffern der Zahl, die sich beim Ausrechnen von

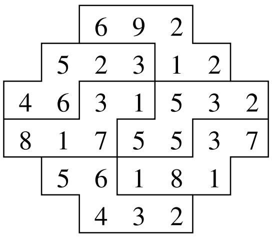
$$1! + 2! + 3! + 4! + ... + 99! + 100!$$

ergeben würde?

33. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 330611:



Die Abbildung zeigt eine Zerlegung der geforderten Art.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330612:

Ist d das Ergebnis der Division der ersten Zahl durch 28, so lautet die erste Zahl $28 \cdot d$. Da d auch das Ergebnis der Division der zweiten Zahl durch 128 ist, lautet die zweite Zahl $128 \cdot d$.

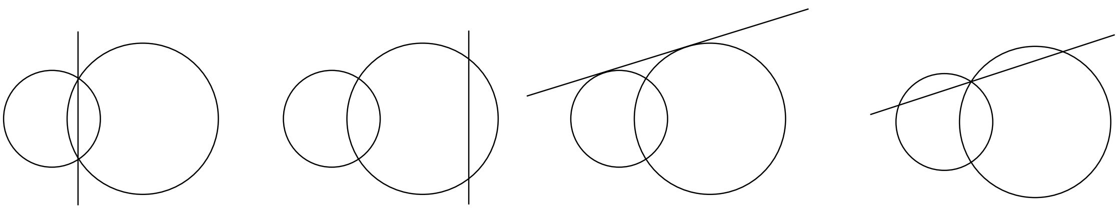
Als Summe der beiden Zahlen $28 \cdot d$ und $128 \cdot d$ ergibt sich folglich $156 \cdot d$; somit muß $156 \cdot d = 2\,028$ sein. Daraus ergibt sich $d = 2\,028 : 156 = 13$. Also sind durch die Forderungen eindeutig $28 \cdot 13 = 364$ und $128 \cdot 13 = 1\,664$ als erste bzw. zweite Zahl bestimmt.

Für sie bestätigt man: $364 : 28$ und $1\,664 : 128$ haben dasselbe Ergebnis 13, und es gilt $364 + 1\,664 = 2\,028$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330613:

Die Abbildung zeigt Beispiele für Zeichnungen der geforderten Art.



a) b1) b2) c)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330614:

Indem man, beginnend mit $1! = 1$, jeweils das zuletzt erhaltene Ergebnis der Reihe nach mit 2, 3, 4, ... usw. multipliziert und jedesmal nur die letzten drei Ziffern berücksichtigt, findet man: Es ist

$$\begin{aligned}1! &= 1,\\ 2! &= 2,\\ 3! &= 6,\\ 4! &= 24,\\ 5! &= 120,\\ 6! &= 720;\end{aligned}$$

die letzten drei Ziffern von 7! sind ...040
die letzten drei Ziffern von 8! sind ...320
die letzten drei Ziffern von 9! sind ...880
die letzten drei Ziffern von 10! sind ...800
die letzten drei Ziffern von 11! sind ...800
die letzten drei Ziffern von 12! sind ...600
die letzten drei Ziffern von 13! sind ...800
die letzten drei Ziffern von 14! sind ...200

Von 15! an lauten die letzten drei Ziffern stets ...000, bei der verlangten Addition ändern sie also das Ergebnis nicht mehr. Durch Addition der hier verzeichneten Ergebnisse folgt daher bereits: Die letzten drei Ziffern von $1! + 2! + ... + 100!$ lauten ...317.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission