33. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Saison 1993/1994

Aufgaben und Lösungen

33. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330721:

An einer Schule gibt es für die Fächer Biologie, Mathematik, Geographie, Geschichte, Deutsch und Englisch drei Lehrer. Ihre Familiennamen sind Schröter, Berger und Müller. Jeder dieser drei Lehrer unterrichtet genau zwei der genannten Fächer, jedes dieser Fächer wird von genau einem Lehrer unterrichtet. Ferner wird über diese Lehrer erzählt:

(1) Zwei der Lehrer, nämlich Herr Berger und der Geschichtslehrer, sind miteinander verwandt.

(2) Drei der Lehrer, nämlich Herr Schröter, der Deutschlehrer und der Englischlehrer, treffen sich oft auf ihrem Weg zur Schule.

(3) Herr Schröter hat neulich den erkrankten Geschichtslehrer vertreten.

(4) Herr Schröter und der Mathematiklehrer sind Gartennachbarn voneinander.

(5) Herr Berger ist älter als der Deutschlehrer.

Untersuche, ob es eine Verteilung der Fächer auf die Lehrer gibt, bei der alle diese Aussagen zutreffen können, und ob die Verteilung der Fächer durch die Aussagen eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, gib diese Verteilung an!

Aufgabe 330722:

Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen (1) und 2) erfüllen!

(1) Die Zahl z ist durch 24 teilbar.

(2) Die zweite Ziffer der Zahl z ist eine 1, die dritte Ziffer von z ist eine 3.

Aufgabe 330723:

Über ihre viertägige Radtour berichten Teilnehmer:

Michael: "Am zweiten Tag haben wir genau 7 km mehr als am dritten Tag zurückgelegt."

Martin: "Am zweiten und am dritten Tag sind wir insgesamt 105 km gefahren."

Matthias: "Am ersten Tag wurden genau $\frac{5}{16}$ und am vierten Tag genau $\frac{1}{4}$ der gesamten Weglänge aller vier Tage geschafft."

Weise nach, daß durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wieviele Kilometer an jedem der vier Tage zurückgelegt wurden, und gib diese vier Weglängen an!

Aufgabe 330724:

Für jedes Dreieck ABC bezeichne H den Fußpunkt der auf BC senkrechten Höhe und W den Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden durch A.

a) Welche Größe muß der Basiswinkel $\sphericalangle BAC$ eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ haben, bei dem die Punkte H und W miteinander zusammenfallen?

b) Welche Größe muß der Winkel $\sphericalangle WAH$ in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ haben, in dem ein Basiswinkel $\sphericalangle BAC$ die Größe $70°$ hat?

c) Ermittle alle diejenigen Werte, die als Größe des Basiswinkels $\sphericalangle BAC$ in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ möglich sind, bei dem der Winkel $\sphericalangle WAH$ die Größe $15°$ hat!

33. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 330721:

I. Wenn die Aussagen zutreffen, so folgt:

Nach (2) ist Herr Schröter weder der Deutsch- noch der Englischlehrer, nach (3) auch nicht der Geschichtslehrer und nach (4) auch nicht der Mathematiklehrer. Da er zwei der sechs Fächer unterrichtet, verbleibt nur:

Herr Schröter unterrichtet Biologie und Geographie. (6)

Nach (1) ist Herr Berger nicht der Geschichtslehrer, nach (5) nicht der Deutschlehrer und nach (6) weder der Biologie- noch der Geographielehrer. Somit gilt:

Herr Berger unterrichtet Mathematik und Englisch. (7)

Schließlich verbleibt nach (6) und (7) nur:

Herr Müller unterrichtet Deutsch und Geschichte. (8)

II. Bei der in (6), (7), (8) angegebenen Verteilung können die Aussagen (1) bis (5) zutreffen; denn bei dieser Verteilung ist Herr Berger weder der Geschichts- noch der Deutschlehrer (daher sind (1) und (5) möglich); und Herr Schröter ist keiner der Lehrer für Deutsch, Englisch, Geschichte oder Mathematik, außerdem sind der Deutsch- und der Englischlehrer voneinander verschieden (daher sind (2), (3) und (4) möglich).

Mit II. ist gezeigt, daß es eine Verteilung gibt, bei der die Aussagen (1) bis (5) zutreffen können, nach I. ist sie durch diese Aussagen eindeutig bestimmt. Sie lautet wie in (6), (7), (8) angegeben.

Andere Darstellungsmöglichkeit z.B. zu I. durch schrittweises Gewinnen einer Tabelle: Aus (1) bis (5) folgt Tabelle 1 und dann, etwa über Tabelle 2 , die Verteilung in Tabelle 3.

Tabelle 1:

	Bio	Mat	Geo	Ges	Deu	Eng
Schröter		-		-	-	-
Berger				-	-	
Müller						

Tabelle 2:

	Bio	Mat	Geo	Ges	Deu	Eng
Schröter	+	-	+	-	-	-
Berger				-	-	
Müller				+	+	

Tabelle 3:

	Bio	Mat	Geo	Ges	Deu	Eng
Schröter	+	-	+	-	-	-
Berger	-	+	-	-	-	+
Müller	-	-	-	+	+	-

Zur Einschätzung derartiger Darstellungen sollte zwar einerseits nicht verlangt werden, daß in der Ausformulierung mit logischen "Kanonen" auf Ermittlungs-"Spatzen" geschossen wird. Andererseits würde z.B. das bloße Angeben einer Tabelle (auch wenn hineininterpretiert werden kann, daß sie schrittweise gefunden wurde) zu wenig dem Anspruch genügen, außer Ergebnis-Angabe auch Begründung zu erbringen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330722:

Die Bedingung (1) ist genau dann erfüllt, wenn die Zahl z durch 3 und durch 8 teilbar ist; denn 3 und 8 sind zueinander teilerfremd, und es gilt $3 \cdot 8 = 24$.

Die Zahl z ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die durch ihre letzten drei Ziffern dargestellte Zahl durch 8 teilbar ist. Zusammen mit Bedingung (2) ist das genau dann der Fall, wenn die vierte Ziffer von z eine 6 ist; denn unter den Zahlen von 130 bis 139 ist genau die Zahl 136 durch 8 teilbar.

Die Zahl z ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Zusammen mit den bereits genannten Bedingungen ist das genau dann der Fall, wenn die erste Ziffer von z eine der drei Ziffern 2, 5, 8 ist; denn die Summe der letzten drei Ziffern 1, 3, 6 beträgt 10, und unter den (durch Addition einer weiteren Ziffer 1,... , 9 entstehenden) Summen von 11 bis 19 sind genau 12, 15 und 18 durch 3 teilbar.

Somit erfüllen genau die Zahlen 2 136, 5 136, 8 136 die Bedingungen (1) und (2).

Bemerkung: Wird die Lösung nicht wie hier als *Äquivalenz* dargestellt, sondern als *Schluß* von (1), (2) auf die Aussage, daß z nur eine der Zahlen 2 136, 5 136, 8 136 sein kann, so ist dann noch (als "Probe") zu vermerken, daß (*der umgekehrte Schluß* gilt, d.h., daß) diese drei Zahlen den Bedingungen (1), (2) genügen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330723:

Am zweiten und am dritten Tag zusammen wurden nach Michaels Aussage 7 km und die zweifache Weglänge des dritten Tages gefahren. Da dies nach Martins Aussage 105 km waren, betrug die zweifache Weglänge des dritten Tages $(105 - 7)\,\text{km} = 98\,\text{km}$. Also wurden

$$\text{am dritten Tag} \quad 98\,\text{km} : 2 = 49\,\text{km},$$
$$\text{am zweiten Tag} \quad (49 + 7)\,\text{km} = 56\,\text{km}$$

gefahren.

Am ersten und am vierten Tag zusammen wurden nach Matthias' Aussage $\frac{5}{16} + \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$ der gesamten Weglänge gefahren. Die 105 km des zweiten und dritten Tages waren folglich die restlichen $\frac{7}{16}$ der gesamten Weglänge; diese betrug daher $\frac{7}{16} \cdot 105\,\text{km} = 240\,\text{km}$. Also wurden

$$\text{am ersten Tag} \quad \frac{5}{16} \cdot 240\,\text{km} = 75\,\text{km},$$
$$\text{am vierten Tag} \quad \frac{1}{4} \cdot 240\,\text{km} = 60\,\text{km}$$

gefahren. Damit ist der geforderte Nachweis geführt, und die vier Weglängen der einzelnen Tage sind angegeben.

Bemerkungen:

1. Anstelle der verbal gefaßten Lösungsdarstellung kann man die Aussagen der Aufgabenstellung in Gleichungen

$$\begin{aligned} s_2 &= s_3 + 7, \\ s_2 + s_3 &= 105, \\ s_1 &= \frac{5}{16}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) \\ s_4 &= \frac{1}{4}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) \end{aligned}$$

   für die Kilometerzahlen s_1, s_2, s_3, s_4 der vier Tage überführen. Zum Lösen dieses Gleichungssystems erweisen sich allerdings gerade die oben verbal formulierten Rechenschritte als besonders praktikabel.

2. Da die Existenz von vier gesuchten Weglängen dem Aufgabentext entnommen werden kann, ist zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe eine Probe nicht erforderlich. Sie ist freilich zur Kontrolle nützlich; sie kann (als "Probe am Text") z.B. in folgenden Feststellungen bestehen:

   56 km sind genau 7 km mehr als 49 km;

   49 km und 56 km betragen zusammen 105 km;

   die Gesamtlänge beträgt $(75 + 49 + 56 + 60)$ km $= 240$ km,

   $\frac{5}{16}$ bzw. $\frac{1}{4}$ hiervon sind 75 km bzw. 60 km

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

<u>Lösung 330724:</u>

a) Aus der Voraussetzung $H = W$ folgt[1], daß das Dreieck ABC auch mit $\overline{AB} = \overline{AC}$ gleichschenklig, wegen der Voraussetzung $\overline{AC} = \overline{BC}$ also sogar gleichseitig ist. Daher gilt $\sphericalangle BAC = 60°$.

b) Siehe Abbildung a): Da AW den Winkel $\sphericalangle BAC$ halbiert, folgt

$$\overline{\sphericalangle BAW} = 35°. \qquad (1)$$

Nach dem Basiswinkelsatz ist auch $\overline{\sphericalangle ABC} = 70°$; nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABH ist ferner

$$\overline{\sphericalangle BAH} = 90° - \overline{\sphericalangle ABH} = 20°. \qquad (2)$$

Der Winkel $\sphericalangle ABC$ ist kleiner als 90°, also liegt H auf derselben Seite von AB wie W. Daher folgt aus (1) und (2)

$$\overline{\sphericalangle WAH} = 35° - 20° = 15°.$$

c) Wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ und $\overline{\sphericalangle WAH} = 15°$ ist, so folgt: Da der Basiswinkel $\sphericalangle ABC$ kleiner als 90°ist, liegt H auf derselben Seite von AB wie W, also entweder auf der Strecke BW oder auf ihrer Verlängerung über W hinaus (siehe Abbildungen a bzw. b). In diesen beiden Fällen folgt mit dem oberen bzw. unteren Vorzeichen $\overline{\sphericalangle BAH} = \overline{\sphericalangle BAW} \mp \overline{\sphericalangle WAH}$, mit $\alpha = \overline{\sphericalangle BAC}$ also

$$\overline{\sphericalangle BAH} = \frac{\alpha}{1} \mp 15°. \qquad (3)$$

Somit besagt der Innenwinkelsatz für Dreieck ABH

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{2} \mp 15°\right) + \alpha &= 90°, && (4) \\ \frac{3}{2}\alpha &= 90° \pm 15°, \\ \alpha &= 60° \pm 10°. && (5) \end{aligned}$$

In der Tat gibt es sowohl für $\alpha = 70°$ als auch für $\alpha = 50°$ gleichschenklige Dreiecke mit α als Basiswinkelgröße (da in beiden Fällen $\alpha < 90°$ ist); für diese Dreiecke gilt (4), also (3) und damit $\overline{\sphericalangle WAH} = 15°$.

Damit ist gezeigt, daß genau die beiden Werte 70°und 50°als Basiswinkelgröße in einem Dreieck der in c) genannten Art möglich sind.

[1] Die Möglichkeit zu dieser Schlußfolgerung kann als bekannter Sachverhalt zitiert oder mit $\overline{AH} = \overline{AH}$, $\overline{\sphericalangle AHB} = \overline{\sphericalangle AHC} = 90°$, $\overline{\sphericalangle BAH} = \overline{\sphericalangle CAH}$ nach dem Kongruenzsatz wsw über $\Delta ABH \cong \Delta ACH$ bewiesen werden.

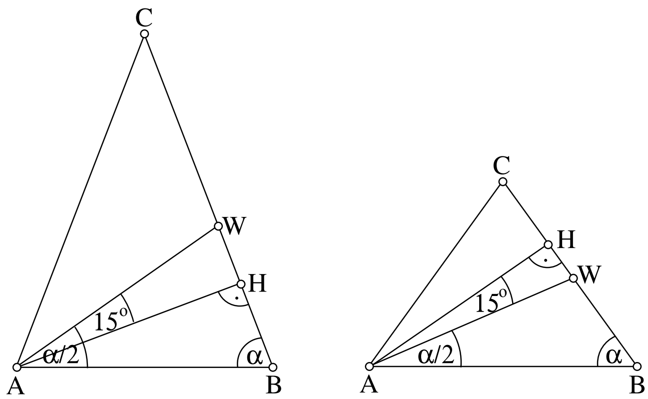

Abbildung a) Abbildung b)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission