33. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Saison 1993/1994

Aufgaben und Lösungen

33. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330731:

Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen (1) und (2) erfüllen!

(1) Die Zahl z ist durch 48 teilbar.

(2) Die zweite Ziffer der Zahl z ist eine 3, die dritte Ziffer von z ist eine 4.

Aufgabe 330732:

In einem Kaufhaus waren $\frac{4}{5}$ aller Beschäftigten Frauen. Zu Anfang eines Monats waren 12,5% dieser Frauen nicht verheiratet. Von den in diesem Kaufhaus beschäftigten Männern waren 18,75% nicht verheiratet.

Während des Monats heirateten vier Paare, von denen jeweils sowohl der Mann als auch die Frau zu den eben genannten unverheirateten Beschäftigten des Kaufhauses gehörten. Weitere Änderungen gab es nicht. Danach waren noch genau 36 Beschäftigte des Kaufhauses unverheiratet.

Wie viele Beschäftigte hatte das Kaufhaus insgesamt?

Aufgabe 330733:

Für jedes Dreieck ABC bezeichne S den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Ferner seien wie üblich mit α, β bzw. γ die Größen der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$ bzw. $\sphericalangle ACB$ bezeichnet.

a) Wie groß sind die Winkel $\sphericalangle ASB$ und $\sphericalangle BSC$ in einem Dreieck ABC, in dem $\alpha = 42°$ und $\beta = 98°$ gilt?

b) Ermittle γ in jedem Dreieck ABC, in dem $\sphericalangle ASB$ die Größe 140° hat!

c) Beweise, daß jedes Dreieck ABC, in dem $\sphericalangle ASB$ und $\sphericalangle BSC$ einander gleich groß sind, gleichschenklig ist! Gib auch an, welche zwei Dreiecksseiten in jedem solchen Dreieck einander gleich lang sind!

Aufgabe 330734:

Ulrike sitzt am Fenster eines Zuges, der mit der Geschwindigkeit $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt. Sie beobachtet, daß an ihrem Fenster ein Gegenzug innerhalb von 4 Sekunden vorüberfährt. Außerdem weiß sie, daß dieser Gegenzug 120 m lang ist.

Untersuche, ob die Geschwindigkeit des Gegenzuges durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, gib diese Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an!

Aufgabe 330735:

Die Klassen $7a$, $7b$, $7c$ trugen ein Fußballturnier aus. Jede Klasse spielte genau einmal gegen jede andere Klasse. Am Ende ergab sich folgender Tabellenstand:

Klasse	Torverhältnis	Punktverhältnis
7b	3:2	3:1
7a	3:1	2:2
7c	2:5	1:3

Untersuche, ob durch diese Angaben eindeutig für jedes Spiel bestimmt ist, wieviele Tore jede Mannschaft in dem betreffenden Spiel erzielt hat! Wenn das der Fall ist, so gib alle diese Ergebnisse an!

Hinweis: Wie üblich bedeutet das Torverhältnis $a : b$ für eine Mannschaft, daß sie in allen Spielen zusammen a Tore erzielt hat und b Tore hinnehmen mußte. Ferner erhält die Mannschaft für jedes gewonnene Spiel 2 Pluspunkte, für jedes verlorene Spiel 2 Minuspunkte und für jedes unentschiedene Spiel 1 Plus- und 1 Minuspunkt. Diese Punkte werden addiert, und dann bedeutet das Punktverhältnis $c : d$, daß die Mannschaft die Summe c der Pluspunkte und die Summe d der Minuspunkte erhalten hat.

Aufgabe 330736:

a) Zeichne ein Dreieck ABC und den Mittelpunkt D der Seite AB! Wähle auf der Strecke DC einen Punkt P zwischen D und C! Zeichne dann die Strecken AP und BP!

   Untersuche für jedes Dreieck ABC (mit D als Mittelpunkt der Seite AB) und für jeden (auf DC gelegenen) Punkt P, ob eines der beiden Dreiecke ACP, BCP größeren Flächeninhalt hat als das andere oder ob sie einander gleichgroßen Flächeninhalt haben!

b) Für jedes Dreieck ABC gibt es in seinem Inneren genau einen Punkt Q, mit dem die Bedingung erfüllt wird, daß die Flächeninhalte der Dreiecke ACQ, BCQ und ABQ sich wie $1 : 2 : 3$ verhalten. (Dies darf im folgenden ohne Beweis verwendet werden.)

   Beschreibe, wie zu jedem Dreieck ABC ein Punkt Q gefunden werden kann, und beweise, daß die genannte Bedingung stets mit diesem - nach Deiner Beschreibung gefundenen - Punkt Q erfüllt wird!

33. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 330731:

I. Wenn eine vierstellige natürliche Zahl z die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt:

   Nach (1) und wegen $48 = 2 \cdot 8 \cdot 3$ ist z auch durch 8 und durch 3 teilbar. Eine Zahl ist nur dann durch 8 teilbar, wenn die durch ihre letzten drei Ziffern dargestellte Zahl durch 8 teilbar ist. Unter den Zahlen von 340 bis 349 ist nur die Zahl 344 durch 8 teilbar. Hiernach und wegen (2) können die letzten drei Ziffern von z nur 3, 4, 4 in dieser Reihenfolge lauten.

   Eine Zahl ist nur dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Da die Summe der letzten drei Ziffern $3 + 4 + 4 = 11$ beträgt, kann hiermit und mit der ersten Ziffer nur dann eine durch 3 teilbare Quersumme entstehen, wenn die erste Ziffer 1 oder 4 oder 7 lautet. Die Zahl 4 344 ist (da die Division 4 344 : 48 auf 90, Rest 24 führt) nicht durch 48 teilbar, also scheidet die 4 als erste Ziffer aus.

   Somit können unter den vierstelligen natürlichen Zahlen nur die beiden Zahlen 1 344 und 7 344 die Bedingungen (1) und (2) erfüllen.

II. Diese beiden Zahlen erfüllen offensichtlich (2) und (wegen $1\,344 : 48 = 28$ sowie $7\,344 : 48 = 153$) auch (1).

Damit sind alle Zahlen der geforderten Art ermittelt: Es sind genau die beiden Zahlen 1 344 und 7 344.

Bemerkungen:

Verwendet man die Aussagen, daß z genau dann durch 48 teilbar ist, wenn z durch 16 und durch 3 teilbar ist, sowie auch für die Teilbarkeit durch 8 bzw. 3 *Äquivalenzaussagen*, so kann man einige Teile der Herleitung anders gestalten. Z.B. genügt es dann, die drei Zahlen 1 344, 4 344, 7 344 (nach Feststellung ihrer durch 3 teilbaren Quersumme) auf Teilbarkeit durch 16 zu prüfen; und wenn 1 344, 7 344 als teilbar durch 3 und durch 16 nachgewiesen sind, kann eine Prüfung auf Teilbarkeit durch 48 entfallen.

Korrekt kann es auch sein, Teile der Herleitung durch Probierschritte zu ersetzen (bis hin zu der - wenig schönen, aber korrekt durchführbaren - Möglichkeit, alle 90 vierstelligen Zahlen, die (2) erfüllen, auf Teilbarkeit durch 48 zu prüfen).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330732:

Wenn das Kaufhaus insgesamt x Beschäftigte hatte, so waren darunter $\frac{4}{5}x$ Frauen und $\frac{1}{5}x$ Männer.

Zu Beginn des Monats waren $\frac{12{,}5}{100} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{1}{10}x$ Frauen und $\frac{18{,}75}{100} \cdot \frac{1}{5}x = \frac{3}{80}x$ Männer unverheiratet, das waren zusammen $\frac{1}{10}x + \frac{3}{80}x = \frac{11}{80}x$ unverheiratete Beschäftigte.

Nach der Heirat der 4 Paare waren noch $\frac{11}{80} - 8$ Beschäftigte unverheiratet. Daher gilt $\frac{11}{80}\,x - 8 = 36$, also $\frac{11}{80}\,x = 44$, $x = \frac{44 \cdot 80}{11} = 320$; das Kaufhaus hatte insgesamt 320 Beschäftigte.

Es gibt mehrere *andere Lösungsdarstellungen*. So kann man die Prozentschreibweise stärker nutzen: Die zu Beginn unverheirateten Frauen waren 12,5% von 80% , das sind 10% aller Beschäftigten; die zu Beginn unverheirateten Männer waren 18,75% von 20%, das sind 3,75% aller Beschäftigten. Also waren die zu Beginn $(36 + 8 =)44$ Unverheirateten 13,75% aller Beschäftigten; deren Anzahl ist $100 \cdot 44 : 13,75 = 320$.

Weitere Bemerkungen: Eine Probe (siehe unten) ist zwar empfehlenswert, aber zur vollständigen Lösung der Aufgabe nicht erforderlich, da die Existenz einer Beschäftigtenzahl, mit der die Aussagen zutreffen, dem Aufgabentext entnommen werden kann. Umgekehrt ist auch ein Lösungsweg zu akzeptieren, bei dem die Eindeutigkeit einer solchen Beschäftigtenzahl dem Aufgabentext entnommen wird und dann mit der - ohne andere Herleitung angesetzten - Zahl 320 die Aussagen (nach Art einer Probe) bestätigt werden: $\frac{4}{5}$ von 320 sind 256, davon 12,5% sind 32; so viele Frauen waren zu Beginn unverheiratet. Weiter ist $320 - 256 = 64$, davon 18,75% sind 12; so viele Männer waren zu Beginn unverheiratet. Am Ende des Monats waren es je 4 weniger, also 28 Frauen und 8 Männer, zusammen 36.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330733:

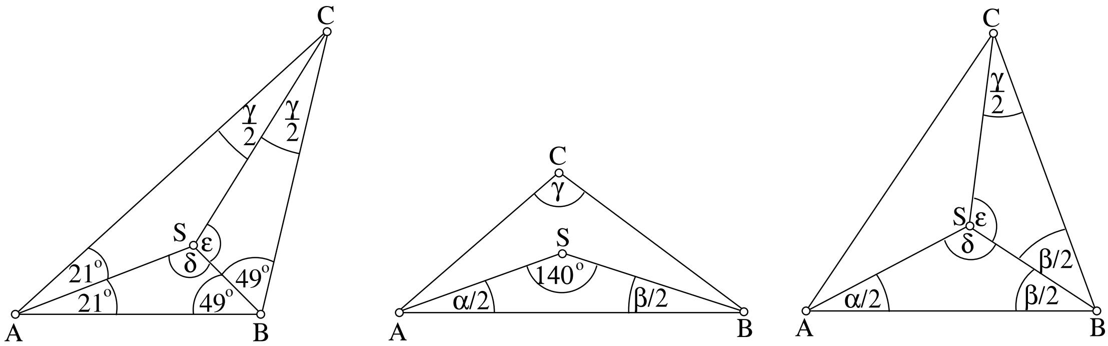
Mit den Bezeichnungen $\delta = \overline{\sphericalangle ASB}$, $\epsilon = \overline{\sphericalangle BSC}$ gilt:

a) Wegen $\frac{\alpha}{2} = 21°$, $\frac{\beta}{2} = 49°$ und nach dem Innenwinkelsatz für das Dreieck ABS ist $21° + 49° + \delta = 180°$, also $\delta = 110°$.

   Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC ist $42° + 98° + \gamma = 180°$, also $\gamma = 40°$; wegen $\frac{\beta}{2} = 49°$, $\frac{\gamma}{2} = 20°$ und nach dem Innenwinkelsatz für das Dreieck BCS ist $49° + 20° + \epsilon = 180°$, also $\epsilon = 111°$.

b) Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABS ist $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 140° = 180°$, also $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 40°$, $\alpha + \beta = 80°$. Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC folgt damit weiter $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 100°$.

c) Nach dem Innenwinkelsatz für die Dreiecke ABS und BCS gilt $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \delta = 180°$ und $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \epsilon = 180°$. Wegen der Voraussetzung $\delta = \epsilon$ folgt daher $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$, also $\frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}$, $\alpha = \gamma$. Nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes ist folglich das Dreieck ABC gleichschenklig mit $\overline{AB} = \overline{BC}$.



a) b) c)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330734:

Die Strecke, die der Gegenzug in 4 Sekunden durchfährt, ergibt sich, wenn man seine Länge 120 m um die Länge derjenigen Strecke vermindert, die Ulrikes Zug selbst in diesen 4 Sekunden zurücklegt. Die letztgenannte Strecke beträgt wegen der Geschwindigkeit $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ von Ulrikes Zug

$$4\,\text{s} \cdot \frac{60 \cdot 1\,000\,\text{m}}{3\,600\,\text{s}} = \frac{200}{3}\,\text{m}.$$

Also durchfährt der Gegenzug in 4 Sekunden die Strecke

$$120\,\text{m} - \frac{200}{3}\,\text{m} = \frac{160}{3}\,\text{m};$$

somit ist seine Geschwindigkeit eindeutig durch die Angaben bestimmt, sie beträgt

$$\frac{\frac{160}{3}\,\text{m}}{4\,\text{s}} = \frac{\frac{160}{3\cdot 1\,000}\,\text{km}}{\frac{4}{3\,600}\,\text{h}} = 48\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Andere Lösungsdarstellung: Für die Zeit $t = \frac{1}{900}\,\text{h}$ die Geschwindigkeiten $v_1 = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ bzw. v_2 des ersten bzw. zweiten Zuges und die Länge $l = 0,12\,\text{km}$ des zweiten Zuges gilt: In der Zeit t durchfährt der zweite Zug eine Strecke der Länge l, vermindert um die Länge derjenigen Strecke, die der erste Zug in der Zeit t zurücklegt. Die letztgenannte Strecke beträgt $t \cdot v_1$, also durchfährt der zweite Zug in der Zeit t die Strecke $s_2 = l - t \cdot v_1$; somit gilt

$$v_2 = \frac{s_2}{t} = \frac{l}{t} - v_1 = (0,12 \cdot 900 - 60)\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 48\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330735:

Klasse 7a hat wegen des Punktverhältnisses 2:2 entweder beide oder keines ihrer zwei Spiele unentschieden gespielt. Da ihr Torverhältnis 3:1 aber zwei unterschiedliche Zahlen aufweist, kann sie nicht beide Spiele unentschieden gespielt haben. Daher folgt:

Klasse 7a hat kein Spiel unentschieden gespielt. (1)

Da die Klassen 7b und 7c in ihren Punktverhältnissen ungerade Zahlen haben, aber gegen 7a nach (1) nicht unentschieden gespielt haben, folgt:

Das Spiel 7b gegen 7c ging unentschieden aus. (2)

Hätte dieses Spiel 0:0 oder 1:1 geendet, so müßte die Klasse 7b ihr Torverhältnis 3:2 so erreicht haben, daß ihr Spiel gegen 7a das Ergebnis 3:2 bzw. 2:1 gehabt hätte. Das ist aber nicht möglich, denn die Klasse 7a hat, wie aus ihrem Torverhältnis 3:1 ersichtlich ist, insgesamt nur ein Gegentor hinnehmen müssen.

Daher und weil Klasse 7c wegen des Torverhältnisses 2:5 insgesamt nur 2 Tore erzielt hat, verbleibt für (2) nur die Möglichkeit:

Das Spiel 7b gegen 7c endete 2:2. (3)

Damit folgt aus den Torverhältnissen von 7b und 7c weiter:

Das Spiel 7b gegen 7a endete 1:0, (4)
Das Spiel 7a gegen 7c endete 3:0. (5)

Durch die Angaben sind also für jedes Spiel die Anzahlen der erreichten Tore eindeutig bestimmt; sie lauten wie in (3), (4), (5).

Bemerkung: Als Probe kann man bestätigen, daß diese Ergebnisse insgesamt zur angegebenen Tabelle führen. Wie bei 330732 ist eine solche Probe (zwar empfehlenswert, aber) zu einer vollständigen Lösung nicht erforderlich.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330736:

a) Für jedes Dreieck ABC mit D als Mittelpunkt der Seite AB und für jeden auf DC gelegenen Punkt P gilt:

Die Dreiecke ACD und BCD haben senkrecht zu AD bzw. BD dieselbe Höhe, nämlich das Lot CG von C auf AB. Wegen $\overline{AD} = \overline{BD}$ haben sie also einander gleichgroßen Flächeninhalt. Ebenso haben ADP und BDP wegen gleicher Höhe PH und $\overline{AD} = \overline{BD}$ einander gleichgroßen Flächeninhalt.

Durch Subtraktion ergibt sich somit: Die beiden Dreiecke ACP, BCP haben einander gleichgroßen Flächeninhalt. $\square$

Eine zweite Beweismöglichkeit besteht darin, für die Lote AS und BT von A bzw. B auf die Gerade durch C, D nachzuweisen, daß $\overline{AS} = \overline{BT}$ gilt. Im Fall $\overline{AC} = \overline{BC}$ nämlich folgt dies aus $CD \perp AB$, $S = T = D$, andernfalls nach dem Kongruenzsatz sww aus $\Delta ADS \cong \Delta BDT$. Auf der gemeinsamen Seite CP haben daher die Dreiecke ACP und BCP einander gleichlange Höhen, also haben sie einander gleichgroßen Flächeninhalt.

b) Man teilt die Strecke AB durch zwei Punkte U, V in drei gleichlange Strecken AU, UV, VB. Dann wählt man Q als den Mittelpunkt der Strecke CU.

Hiernach haben die drei Dreiecke AUQ, UVQ, VBQ das Lot von Q auf AB als gemeinsame Höhe auf AU, UV bzw. VB und daher wegen $\overline{AU} = \overline{UV} = \overline{VB}$ einander gleichgroßen Flächeninhalt. Wird dieser mit J bezeichnet, so hat also das Dreieck ABQ den Flächeninhalt $3J$.

Ferner haben die Dreiecke AUQ und ACQ das Lot von A auf CU als gemeinsame Höhe auf UQ bzw. CQ und daher wegen $\overline{UQ} = \overline{CQ}$ einander gleichgroßen Flächeninhalt; d.h., das Dreieck ACQ hat ebenfalls den Flächeninhalt J.

Entsprechend haben die Dreiecke BUQ und BCQ einander gleichgroßen Flächeninhalt; d.h., das Dreieck BCQ hat den Flächeninhalt $2J$.

Wird also der Punkt Q nach der gegebenen Beschreibung gefunden, so erfüllt er die Bedingung, daß die Flächeninhalte der Dreiecke ACQ, BCQ, ABQ sich wie 1:2:3 verhalten.

Andere Lösungsmöglichkeit: Da es genau einen Punkt Q mit der genannten Bedingung gibt, so folgt (z.B.) für seine Abstände zu den Seiten AC und BC: Diese Abstände betragen $\frac{1}{6}$ bzw. $\left(\frac{2}{6}\right) = \frac{1}{3}$ der auf AC bzw. BC senkrechten Höhe BE bzw. AF des Dreiecks ABC.

Konstruiert man daher auf BE den Punkt E' mit $\overline{EE'} = \frac{1}{6}EB$ und auf AF den Punkt F' mit $\overline{FF'} = \frac{1}{3}\overline{FA}$, so müssen sich die Parallele durch E' zu AC und die Parallele durch F' zu BC in dem Punkt Q schneiden, der die genannte Bedingung erfüllt.

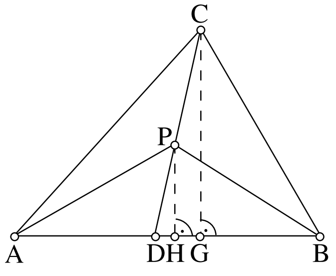


Abbildung a)$_1$

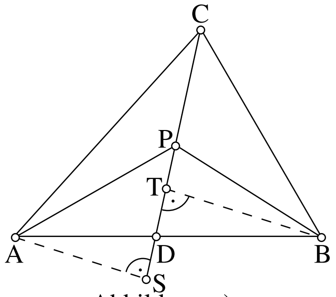


Abbildung a)$_2$

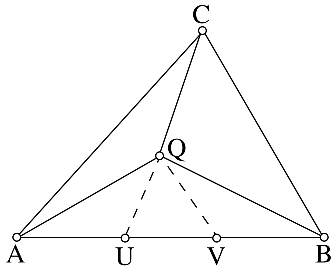


Abbildung b)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission