33. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 12
Saison 1993/1994

Aufgaben und Lösungen

33. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 12
Aufgaben

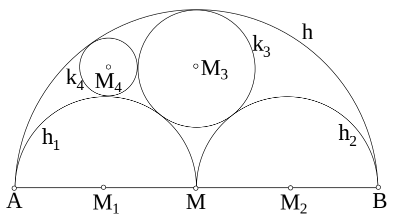
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 331231:

Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c, d die nachstehende Ungleichung gilt!

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \leq \frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}} \tag{1}$$

Aufgabe 331232:



Über einer Strecke AB sei ein Halbkreis h mit dem Mittelpunkt M errichtet. Darin (siehe Abbildung) seien die Halbkreise h_1 und h_2 über AM bzw. MB konstruiert. Ferner sei k_3 derjenige Kreis, der h von innen sowie h_1 und h_2 von außen berührt, und es sei k_4 derjenige Kreis, der h von innen sowie h_1 und k_3 von außen berührt.

Man beweise, daß M und die Mittelpunkte M_3, M_4, M_1 von k_3, k_4 bzw. h_1 die Ecken eines Rechtecks sind.

Aufgabe 331233A:

Ist m eine natürliche Zahl mit $m \geq 2$, so werde eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\{0,1,2,\dots\}}$ durch die Festsetzung definiert, daß $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ gelten soll und für $n \geq 0$ jeweils x_{n+2} der Rest (mit $0 \leq x_{n+2} < m$) sein soll, den $x_{n+1} + x_n$ bei Division durch m läßt.

Man untersuche, ob zu jeder natürlichen Zahl m mit $m \geq 2$ eine natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ existiert, mit der die drei Gleichungen $x_0 = x_k$, $x_1 = x_{k+1}$ und $x_2 = x_{k+2}$ gelten.

Aufgabe 331233B:

Für jede ganze Zahl n mit $n \geq 0$ sei f_n die durch

$$f_n(x) = x^3 + (n+3)\cdot x^2 + 2n\cdot x - \frac{n}{n+1}$$

für alle reellen x definierte Funktion.

Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen n mit $n \geq 0$, für die gilt: Alle Nullstellen von f_n liegen in einem Intervall der Länge 3.

Aufgabe 331234:

Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, für die $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 1\,993$ gilt.

Aufgabe 331235:

Zwei kongruente regelmäßsige $2n$-Ecke seien durch Verbinden ihrer Eckpunkte mit dem jeweiligen Mittelpunkt in Dreiecke zerlegt. Jedes dieser Dreiecke sei entweder blau oder rot gefärbt. Von einem der beiden $2n$-Ecke werde vorausgesetzt, dass es ebenso viele blaue wie rote Dreiecke hat.

Man beweise: Unter diesen Voraussetzungen ist es stets möglich, die beiden $2n$-Ecke so aufeinanderzulegen, daß in mindestens n übereinanderliegenden Dreieckspaaren die beiden Dreiecke dieses Paares einander gleichgefärbt sind.

Aufgabe 331236:

Man ermittle für jede natürliche Zahl n die größte Zweierpotenz, die ein Teiler der Zahl $\left[\left(4+\sqrt{18}\right)^n\right]$ ist.

Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq r < g+1$ gilt, mit $g = [r]$ bezeichnet.

33. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 331331:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 331332:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 331333A:

Es gibt nur m^2 verschiedene Werte für Paare (x_n, x_{n+1}) aufeinanderfolgender Folgenglieder, aber unendlich viele Folgenglieder. Daher gibt es nach dem Schubfachprinzip ein n und ein k mit $k > 0$, so dass $x_n = x_{n+k}$ und $x_{n+1} = x_{n+k+1}$ gilt. (Es gibt sogar ein n für das es unendlich viele solcher ks gibt.) Für zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder x_j, x_{j+1} lässt sich das Vorgängerglied eindeutig bestimmen mit $x_{j-1} = (x_{j+1} - x_j) \bmod m$, also gilt auch $x_{n-1} = x_{n+k-1}$, $x_{n-2} = x_{n+k-2}$ usw. bis zu $x_0 = x_k$.

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann

Lösung 331333B:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 331334:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Lösung 331335:

Das eine $2n$-Eck besitze b blaue und $2n - b$ rote Dreiecke und das andere $2n$-Eck jeweils n blaue und rote Dreiecke. Bei allen $2n$ Drehungen gibt es zusammengenommen $n \cdot b$ Übereinstimmungen blauer Dreiecke und $n \cdot (2n - b)$ Übereinstimmungen roter Dreiecke. Das sind zusammen $2n^2$ Übereinstimmungen. Bei $2n$ möglichen Drehungen bedeutet dies nach dem Schubfachprinzip, dass es bei wenigstens einer Drehung mindestens n Übereinstimmungen gibt.

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann

Lösung 331336:

Aufgeschrieben von Unbekannt – Quelle: (0)

Quellenverzeichnis

(0) Unbekannt