34. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 6
Saison 1994/1995

Aufgaben und Lösungen

34. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340631:

Jedes konvexe Vieleck läßt sich in Dreiecke zerlegen, deren Eckpunkte zugleich Eckpunkte des Vielecks sind. Bei einem Viereck beispielsweise findet man dafür genau 2 Möglichkeiten (siehe Abbildung a).

Skizziere für ein selbstgewähltes

a) konvexes Fünfeck

b) konvexes Sechseck

alle Zerlegungen dieser Art!

Hinweis: Ein Vieleck wird genau dann *konvex* genannt, wenn alle seine Diagonalen ganz der Fläche des Vielecks angehören. Ein Beispiel für ein Vieleck, das nicht konvex ist, zeigt Abbildung b.

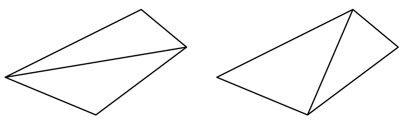

Abbildung a

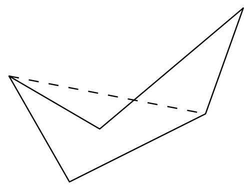

Abbildung b

Aufgabe 340632:

Man kann die Buchstaben eines Wortes in eine andere Reihenfolge bringen. Jede so entstandene Aneinanderreihung von Buchstaben soll ebenfalls ein "Wort" genannt werden, auch wenn sie (in der deutschen Sprache) keinen Sinn ergibt. Wichtig ist nur, daß jeder Buchstabe genau so oft vorkommt wie im ursprünglichen Wort. Zum Beispiel lassen sich aus dem Wort TAL insgesamt folgende Wörter bilden:

ALT, ATL, LAT, LTA, TAL, TLA.

Sie sind hier alphabetisch geordnet (zum Beispiel steht ATL vor LAT, weil der erste Buchstabe A von ATL im Alphabet früher vorkommt als der erste Buchstabe L von LTA; über die Reihenfolge von LAT und LTA mit gleichem ersten Buchstaben entscheidet der zweite Buchstabe u.s.w.).

Wie man sieht, steht bei dieser Anordnung das Wort TAL an der 5. Stelle der Aufzählung.

(a) Gib alle Wörter an, die sich ebenso aus dem Wort $LAND$ bilden lassen (das Wort $LAND$ ist dabei mit aufzuzählen)!

(b) Wenn die Wörter in (a) alphabetisch geordnet werden, an welcher Stelle steht dann das Wort $LAND$?

(c) Wie viele Wörter lassen sich aus dem Wort $UMLAND$ bilden? (Wieder ist $UMLAND$ mitzuzählen.)

(d) An wievielter Stelle steht bei alphabetischer Ordnung der Wörter aus (c) das Wort $UMLAND$?

Aufgabe 340633:

Schon vor 5000 Jahren gab es in Ägypten eine weit entwickelte Kenntnis der Bruchrechnung. Dabei wurden *Stammbrüche* bevorzugt; das sind Brüche, deren Zähler 1 lautet und deren Nenner eine natürliche Zahl ist.

(a) Gib je eine Möglichkeit an, wie man die Brüche $\frac{2}{7}$ und $\frac{3}{13}$ als Summe von mindestens zwei unterschiedlichen Stammbrüchen darstellen kann!

Die Anzahl der Summanden ist nicht vorgeschrieben; eine Begründung wird nicht verlangt.

(b) Stelle den Bruch $\frac{1}{36}$ derart als Summe von mindestens zwei Stammbrüchen dar, daß einer der Summanden so groß wie möglich ist! Erkläre, warum kein größerer Summand möglich ist!

(c) Löse dieselbe Aufgabe für $\frac{1}{n}$ statt $\frac{1}{36}$, wo n eine beliebige natürliche Zahl größer als 1 ist!

Aufgabe 340634:

Vera erzählt ihrer Freundin Ute, sie habe die Kantenlänge eines Quaders gemessen und dabei folgendes bemerkt:

(1) Eine der Kanten ist doppelt so lang wie eine andere der Kanten.

(2) Die Summe der Längen aller zwölf Kanten des Quaders beträgt 320 cm.

(3) Genau zwei der sechs Seitenflächen des Quaders sind Quadrate.

Ute meint, durch diese Angaben sei eindeutig bestimmt, welche Kantenlängen bei diesem Quader auftreten. Untersuche, ob Utes Meinung wahr ist! Wenn sie wahr ist, gib die Kantenlängen an; wenn sie nicht wahr ist, gib alle Möglichkeiten an, die es für die Kantenlängen eines Quaders gibt, auf den Veras Angaben zutreffen!

Hinweis: Bei der Angabe der Kantenlängen eines Quaders brauchst du natürlich nicht zwölf Kantenlängen anzugeben, sondern es genügen die Längen etwa der drei Kanten, die an der Ecke des Quaders zusammentreffen.

Aufgabe 340635:

In das Schema der Abbildung a kann man anstelle der Buchstaben Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 so eintragen, daß die vier "Seitensummen" einander gleich sind:

$$a + b + c = c + d + e = e + f + g = g + h + a.$$

Ein Beispiel, hier mit dem Wert 14 der vier "Seitensummen", zeigt die Abbildung b.

(a) Gib drei solcher Eintragungen an, eine mit dem Wert 2 der vier "Seitensummen", eine mit dem Wert 13 der vier "Seitensummen" und eine mit dem Wert 17 der vier "Seitensummen"!

(b) Auch mit dem Wert 18 der vier "Seitensummen" ist eine solche Eintragung möglich; dagegen nicht, wenn das Schema so mit Steinen des Dominospiels gebildet werden soll, wie die Abbildung c zeigt.

Zeige, daß das stimmt; erkläre den Unterschied!

(Du erinnerst dich vielleicht an eine Aufgabe aus der 2. Runde der Mathematik-Olympiade dieses Schuljahres. Es ist zugelassen - freilich nicht verlangt, - Teile der Lösung jener Aufgabe als bekannten Sachverhalt anzuführen.)

(c) Fritz Schlaumeier schaut das ausgefüllte Schema für die "Seitensumme" 14 an, überlegt eine ganze Weile und meint dann: "Die vier Zahlen für b, d, f und h stehen in einer ganz besonderen Beziehung zueinander. Diese Beziehung gilt auch für jede Ausfüllung mit einer anderen 'Seitensumme'."

Gib eine solche Beziehung an und weise nach, daß Fritz recht hat!

a	b	c
h		d
g	f	e

Abb. a

4	4	6
5		5
5	6	3

Abb. b

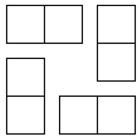

Abb. c

Aufgabe 340636:

Vater, Mutter, Tochter und Sohn in einer Familie stellen fest:

(1) Das Produkt aus Tag- und Monatszahl des Geburtstages beträgt beim Vater 242, bei der Mutter 200 und bei der Tochter 6.

(Beispiel für eine solche Produktbildung: Ein Geburtstag am 30. Juli ergibt $30 \cdot 7 = 210$.)

(2) Die Summe aus Tag- und Monatszahl des Geburtstages ergibt bei jedem der vier Familienmitglieder die - in ganzen Zahlen gerechnete - Altersangabe in Jahren.

(3) Die Summe dieser vier Altersangaben beträgt 80.

(4) Das Produkt dieser vier Altersangaben beträgt 59 400.

(a) Wie alt sind die Familienmitglieder? Wann haben Vater, Mutter und Tochter Geburtstag?

Gewinne die Antworten auf diese Fragen ausgehend von den Feststellungen (1), (2), (3), (4)! Untersuche dabei auch, ob es für einige der erfragten Angaben mehrere Möglichkeiten gibt!

(b) Zeige, daß man die Aufgabe (a) auch noch - mit demselben Ergebnis - lösen kann, wenn man eine der Feststellungen (1), (2), (3), (4) wegläßt!

34. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 340631:

Die Abbildungen L340631 a, b zeigen Zeichnungen der verlangten Art.

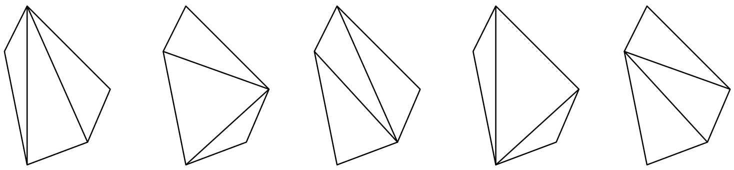

Abbildung a

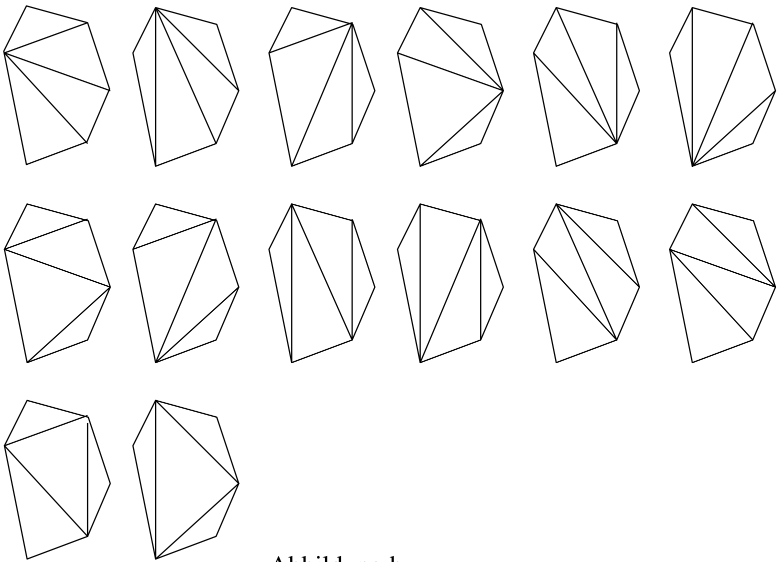

Abbildung b

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340632:

(a) Die gesuchten Wörter, bereits alphabetisch geordnet, sind:

$ADLN$,	$ADNL$,	$ALDN$,	$ALND$,	$ANDL$,	$ANLD$,
$DALN$,	$DANL$,	$DLAN$,	$DLNA$,	$DNAL$,	$DNLA$,
$LADN$,	$LAND$,	$LDAN$,	$LDNA$,	$LNAD$,	$LNDA$,
$NADL$,	$NALD$,	$NDAL$,	$NDLA$,	$NLAD$,	$NLDA$.

(b) Das Wort $LAND$ steht hierbei an der 14. Stelle.

(c) Für die Wahl des 1. Buchstabens (aus den 6 Buchstaben U, M, L, A, N, D) hat man genau 6 Möglichkeiten. In jeder dieser Möglichkeiten hat man für die Wahl des 2. Buchstabens genau 5 Möglichkeiten. Damit ergeben sich $6 \cdot 5$ Möglichkeiten für die Wahl der ersten beiden Buchstaben. Entsprechend folgt: Für die Wahl der ersten drei Buchstaben hat man $6 \cdot 5 \cdot 4$ Möglichkeiten. So fortfahrend ergibt sich: Es gibt genau $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ Wörter aus den 6 Buchstaben des Wortes $UMLAND$.

(d) Um die Wörter zu kennzeichnen, die dem Wort $UMLAND$ vorangehen, betrachten wir zunächst die mit A beginnenden Wörter. Sie werden gebildet, indem man auf A alle Wörter aus den 5 Buchstaben D, L, M, N, U folgen läßt. Wie in (c) ergibt sich, daß dies genau $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Wörter sind.

In dieser Weise fortfahrend kommt man zu folgender Aufzählung. Dem Wort $UMLAND$ gehen insgesamt voran:

Für jeden der $\underline{5}$ Buchstaben A, D, L, M, N jeweils $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Wörter, die mit diesem betreffenden Buchstaben beginnen;

weitere, mit U beginnende Wörter, und zwar für jeden der $\underline{3}$ Buchstaben A, D, L jeweils $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Wörter, in denen dieser betreffende Buchstabe auf den Anfangsbuchstaben U folgt;

weitere, mit UM beginnende Wörter, und zwar für jeden der $\underline{2}$ Buchstaben A, D jeweils $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Wörter, in denen dieser betreffende Buchstabe auf den Wort-Anfang UM folgt;

schließlich (nach den zuletzt erfaßten Wörtern mit dem Wort-Anfang UMD) das <u>eine</u> Wort $UMLADN$.

Zusammen sind das $\underline{5} \cdot 120 + \underline{3} \cdot 24 + \underline{2} \cdot 6 + \underline{1} = 685$ Wörter. Also steht das Wort $UMLAND$ an der 686. Stelle.

Bemerkung: Zur vertieften Beschäftigung mit Aufgaben dieser Art kann man Fragen wie etwa die folgende behandeln: Welches Wort steht (bei alphabetischer Reihenfolge der aus dem Wort $UMLAND$ gebildeten Wörter) an der 352. Stelle der Aufzählung? Zur Beantwortung dieser Frage ist folgende Rechnung nützlich: Es gilt

$$351 = \underline{2} \cdot 120 + 111, \qquad 111 = \underline{4} \cdot 24 + 15, \qquad 15 = \underline{2} \cdot 6 + 3, \qquad 3 = \underline{1} \cdot 2 + 1.$$

Die unterstrichenen Zahlen ermöglichen nämlich eine Übersicht über die ersten 351 Wörter der Aufzählung.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

<u>Lösung 340633:</u>
Beispiele zu (a) sind etwa:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}, \qquad \frac{3}{13} = \frac{1}{6} + \frac{1}{26} + \frac{1}{39}$$

(b),(c) Es gilt

$$\frac{1}{36} - \frac{1}{37} = \frac{37-36}{36 \cdot 37} = \frac{1}{1332}, \text{ also } \frac{1}{36} = \frac{1}{37} + \frac{1}{1332},$$
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n \cdot (n+1)}, \text{ also } \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Dabei hat der Summand $\frac{1}{37}$ (bzw. der Summand $\frac{1}{n+1}$) die verlangte Eigenschaft, daß kein größerer Stammbruch Summand in einer solchen Darstellung sein kann.

Beweis:

Unter den natürlichen Zahlen ist 37 (bzw. $n+1$) die nächstgrößere zu 36 (bzw. zu n), d.h.: Es gibt unter den natürlichen Zahlen, die größer als 36 (bzw. als n) sind, *keine kleinere als* 37 (bzw. $n+1$). Daraus folgt:

Es gibt unter den Stammbrüchen, die (in einer gesuchten Darstellung als Summand auftreten und daher) kleiner als $\frac{1}{36}$ (bzw. als $\frac{1}{n}$) sein müssen, *keinen größeren als* $\frac{1}{37}$ (bzw. $\frac{1}{n+1}$).

Bemerkung: Interessiert man sich für Zerlegungen, die nicht $\frac{1}{n+1}$, sondern den nächstkleineren Stammbruch $\frac{1}{n+2}$ enthalten, so findet man z.B. für jede gerade Zahl $n = 2m$

$$\frac{1}{2m} = \frac{1}{2m+2} + \frac{1}{2m \cdot (m+1)},$$

z.B. für jede ungerade Zahl $n = 2m - 1$

$$\frac{1}{2m-1} = \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{2m^2 \cdot (4m^2-1)}$$

und z.B. für jede natürliche Zahl n

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n \cdot (n+2)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n \cdot (n+2) \cdot (n+1)^2}.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340634:

I. Wenn a, b, c die Maßzahlen der in cm gemessenen Längen von drei an einer Ecke zusammentreffenden Kanten eines Quaders sind, auf den Veras Aussagen (1), (2), (3) zutreffen, so folgt:

   Nach (3) sind genau zwei der a, b, c einander gleich; die Bezeichnungen lassen sich so wählen, daß $b = c$ gilt.

   Nach (2) und weil jede der Kantenlängen a, b, c genau 4 mal vorkommt, folgt daher

   $$a + 2b = 320 : 4 = 80. \tag{4}$$

   Aus (1) folgt ferner: Es gilt

   $$\text{entweder } a = 2b \tag{5}$$
   $$\text{oder } b = 2a. \tag{6}$$

   Gilt (4) und (5), so folgt $a + a = 80$, also

   $$a = 40,\ b = 20,\ c = 20. \tag{7}$$

   Gilt aber (4) und (6), so folgt $a + 4a = 80$, $5a = 80$, also

   $$a = 16,\ b = 32,\ c = 32. \tag{8}$$

II. Die in (7) genannten Zahlen erfüllen (4) und (5), die in (8) genannten Zahlen erfüllen (4) und (6); außerdem gilt in beiden Fällen $b = c$. Daher treffen in beiden Fällen Veras Aussagen (1), (2), (3) zu.

Mit I. und II. ist gezeigt: Die Kantenlängen eines Quaders sind durch Veras Angaben (1), (2), (3) nicht eindeutig bestimmt (d.h. Utes Meinung ist nicht wahr), sondern es gibt für die Kantenlängen eines Quaders, auf den Veras Aussagen zutreffen, genau die beiden Möglichkeiten, daß diese Kantenlängen entweder 40 cm, 20 cm, 20 cm oder 16 cm, 32 cm, 32 cm betragen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340635:

(a) Die Abbildung zeigt je ein Beispiel für Eintragungen mit den "Seitensummen" 2, 13 und 17.

1	1	0
0		2
1	1	0

4	6	3
5		4
4	3	6

5	6	6
6		5
6	5	6

(b) Der Unterschied kann folgendermaßen erklärt werden: Für das Schema aus Abbildung zur Aufgabe a ist eine Eintragung mit der "Seitensumme" 18 möglich, indem man in alle acht Felder eine 6 einträgt.

Daraus jedoch, daß ein Dominospiel nur einen Stein (6;6) enthält, folgt: Mit den Steinen eines Dominospiels ist eine solche Eintragung nicht möglich. (Das Ausführen dieses Schlusses, wie z.B. im folgenden angegeben, kann auch durch einen Verweis auf 340624 (b) ersetzt werden:) Die einzige Möglichkeit, 18 als Summe von drei Summanden darzustellen, die nur Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sein dürfen, lautet nämlich $18 = 6 + 6 + 6$. Demzufolge gibt es keine andere Möglichkeit, die "Seitensumme" 18 zu erreichen, als mit der 6 in allen Feldern. Dazu wäre aber mehr als ein Stein (6;6) erforderlich.

(c) Eine Beziehung zwischen den Zahlen für b, d, f, h ist $b + f = d + h$.

Beweis:

Wegen der Gleichheit aller vier "Seitensummen" gelten z.B. auch die Gleichungen

$$a + b + c = c + d + e \quad \text{und}$$
$$e + f + g = g + h + a,$$

die auf beiden Seiten eine <u>Eckenzahl</u> enthalten. Daher gelten auch die Gleichungen

$$a + b = d + e,$$
$$e + f = a + h.$$

Aus ihnen folgt $(\underline{a} + b) + (\underline{e} + f) = (d + \underline{e}) + (h + \underline{a})$. Da auch in dieser Gleichung auf beiden Seiten übereinstimmende Summanden, nämlich a und e, vorkommen, folgt

$$b + f = d + h.$$

Hinweis zur Korrektur: In der Aufgabenstellung war offengelassen, welche "besondere Beziehung" anzugeben ist. Andere mögliche Angaben sind Beziehungen, die zu der hier genannten Gleichung äquivalent sind (Beispiel: "Es gilt $b - d = h - f$.") oder auch nur aus ihr folgen (Beispiel: "Von den Zahlen b, d, f, h sind entweder alle vier oder keine oder genau zwei ungerade." Weiteres Beispiel: "Wenn $b < d$ ist, dann ist $h < f$."). In die Bewertung einer Schülerlösung ist einzubeziehen, ob bzw. wie weit ein Beweis für die Allgemeingültigkeit einer angegebenen Beziehung korrekt ist - natürlich unter Berücksichtigung altersgerechter Formulierungsmöglichkeiten. Eine Bewertung nach der "Qualität" einer Angabe sollte mit Vorsicht erfolgen, um der Ungenauigkeit der Zielformulierung "ganz besondere Beziehung" Rechnung zu tragen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340636:

(a) I. Aus den Feststellungen (1), (2), (3), (4) kann man folgende Schlüsse ziehen:

Um (1) anzuwenden, ermittelt man alle Zerlegungen von 242, 200 bzw. 6 in je zwei Faktoren, die als Tag- und Monatszahl möglich sind. Man findet, z.B. mit Hilfe der Zerlegungen $242 = 2 \cdot 11 \cdot 11$, $200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ bzw. $6 = 2 \cdot 3$ in Primfaktoren (oder auch einfach mit probeweisem Dividieren durch 1, 2, ..., 12): Die genannten Zerlegungen sind genau $242 = 22 \cdot 11$, $200 = 25 \cdot 8 = 20 \cdot 10$ bzw. $6 = 6 \cdot 1 = 3 \cdot 2$; daraus folgt nach (1):

Der Geburtstag des Vaters ist der 22.11., (5)
Der Geburtstag der Mutter ist der 25.8. oder der 20.10., (6)
Der Geburtstag der Tochter ist einer der Tage 6.1., 3.2., 2.3., 1.6.. (7)

Aus (2) und (5), (6), (7) ergibt sich:

Der Vater ist 33 Jahre alt, (8)
die Mutter ist entweder 33 oder 30 Jahre alt, (9)
die Tochter ist entweder 7 oder 5 Jahre alt. (10)

Nach (8) und (4) beträgt das Produkt der Altersangaben von Mutter, Tochter und Sohn

$$59\,400 : 33 = 1\,800.$$

Da diese Zahl weder durch 33 noch durch 7 teilbar ist, sind in (9), (10) und damit in (6), (7) nur möglich:

Die Mutter ist 30 Jahre alt, ihr Geburtstag ist der 20.10., (11)
die Tochter ist 5 Jahre alt, ihr Geburtstag ist entweder der 3.2. oder der 2.3.. (12)

Nochmals nach (4) folgt dann wegen $1\,800 : 30 = 60$ und $60 : 5 = 12$:

Der Sohn ist 12 Jahre alt. (13)

Daher können die Feststellungen (1), (2), (3), (4) nur bei den Angaben in (5), (8), (11), (12), (13) erfüllt sein.

II. Bei diesen Angaben sind die Feststellungen (1), (2), (3), (4) erfüllt. (Wegen $33+30+5+12 = 80$ ist insbesondere auch die - in den bisherigen Betrachtungen noch nicht herangezogene - Feststellung (3) erfüllt.)

Mit I. und II. ist gezeigt: Die beiden in (5), (8), (11), (12), (13) angegebenen Möglichkeiten (für das Alter der vier Familienmitglieder und die Geburtstage von Vater, Mutter und Tochter) sind alle diejenigen, bei denen die Feststellungen (1), (2), (3), (4) erfüllt sind.

(b) Da in (a) I. die Feststellung (3) nicht herangezogen wird (und in (a) II. natürlich auf das Bestätigen dieser Feststellung verzichtet werden kann, wenn sie nicht zu den Forderungen der Aufgabe gehört), hat die Aufgabe nach Weglassen von (3) dieselbe Lösung.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission