34. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Saison 1994/1995

Aufgaben und Lösungen

34. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340711:

Armin hat 100 Stäbchen von je 7 cm Länge und 100 Stäbchen von je 12 cm Länge. Er möchte mit solchen Stäbchen eine Strecke von 1 m Länge auslegen. Die Stäbchen sollen dabei stets lückenlos aneinander anschließen, und keine Teilstrecke darf mehrfach belegt sein.

Finde alle Möglichkeiten dafür, wie viele Stäbchen von 7 cm und wie viele von 12 cm sich zu einer solchen Belegung zusammenstellen lassen!

Aufgabe 340712:

Von einem Dreieck ABC wird gefordert: Die Winkelhalbierende durch A und die Mittelsenkrechte von AB schneiden sich in einem Punkt D, der auf der Seite BC liegt.

a) Welche Größe muß der Winkel $\sphericalangle ACB$ in einem Dreieck haben, das diese Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe 35° hat? Zeichne ein solches Dreieck!

b) Zeichne ein Dreieck, das ebenfalls die obengenannte Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe 50° hat!

c) Gibt es ein Dreieck, das ebenfalls die obengenannte Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe 60° hat?

Aufgabe 340713:

Franziska sucht eine vierstellige natürliche Zahl z, für die die folgenden Aussagen (1), (2) und (3) gelten:

(1) Die Einerziffer von z ist um 1 größer als die Zehnerziffer von z.

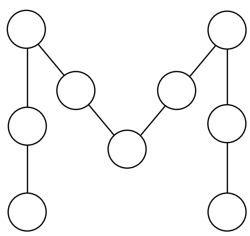
(2) Die Hunderterziffer von z ist doppelt so groß wie die Zehnerziffer von z.

(3) Die Zahl z ist doppelt so groß wie eine Primzahl.

Weise nach, daß es genau eine solche Zahl gibt; ermittle diese Zahl!

Aufgabe 340714:

In die Kreise der Zeichnung sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 eingetragen werden. Dabei soll folgende Bedingung erfüllt werden: Auf jeder der vier Dreiergruppen, die mit geradliniger Verbindung gezeichnet sind, ergibt sich dieselbe Summe s.



a) Welches ist der kleinste Wert von s, mit dem diese Bedingung erfüllbar ist? Gib eine Eintragung an, bei der diese Summe s vorliegt! Beweise, daß keine kleinere Summe möglich ist!

b) Welches ist der größte Wert s, mit dem die genannte Bedingung erfüllbar ist? Gib auch hierzu eine Eintragung an!

c) Ist die Bedingung auch mit allen denjenigen natürlichen Zahlen s erfüllbar, die zwischen dem kleinsten und dem größten Wert aus a) bzw. b) liegen?

34. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 340711:

Mit x Stäbchen der Länge 7 cm und y Stäbchen der Länge 12 cm läßt sich genau dann eine Strecke von 1 m Länge auslegen, wenn $7x + 12y = 100$ gilt.

I. Wenn x und y zwei Anzahlen sind, die diese Bedingung erfüllen, so folgt:

   Da 12 und 100 durch 4 teilbar sind, aber 7 zu 4 teilerfremd ist, muß x durch 4 teilbar sein.

   Wäre $x \geq 16$, so wäre $7x + 12y \geq 7 \cdot 16 > 100$. Also kann x nur eine der Zahlen 0, 4, 8, 12 sein.

   Wäre $x = 0$, so folgte $12y = 100$; wäre $x = 8$, so folgte $12y = 100 - 7 \cdot 8 = 44$; wäre $x = 12$, so folgte $12y = 100 - 7 \cdot 16$. In allen drei Fällen erhielte man für y keine ganze Zahl. Also kann nur $x = 4$ und damit $12y = 100 - 7 \cdot 4 = 72$, also $y = 6$ sein.

II. Für $x = 4$ und $y = 6$ wird die Bedingung wegen $7 \cdot 4 + 12 \cdot 6 = 28 + 72 = 100$ erfüllt.

   Daher gibt es zum Auslegen der Strecke genau die Möglichkeit, 4 Stäbchen von 7 cm und 6 Stäbchen von 12 cm zusammenzustellen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340712:

a) Für die Innenwinkelgrößen $\alpha = \overline{\sphericalangle BAC}$, $\beta = \overline{\sphericalangle ABC}$, $\gamma = \overline{\sphericalangle ACB}$ gilt:

   Da D ein Punkt der Mittelsenkrechten von AB ist, gilt $\overline{DA} = \overline{DB}$.

   Nach dem Basiswinkelsatz für Dreieck ABD folgt

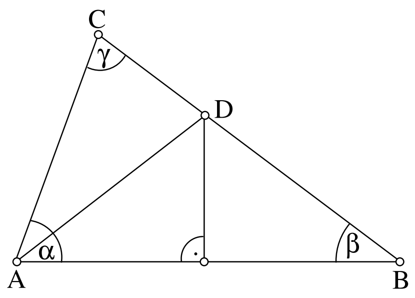
   $$\overline{\sphericalangle BAD} = \overline{\sphericalangle ABD} = \beta = 35°.$$

   Da AD den Innenwinkel bei A halbiert, folgt

   $$\alpha = 2 \cdot \overline{\sphericalangle BAD} = 2\beta = 70°.$$

   Damit ergibt sich aus dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC

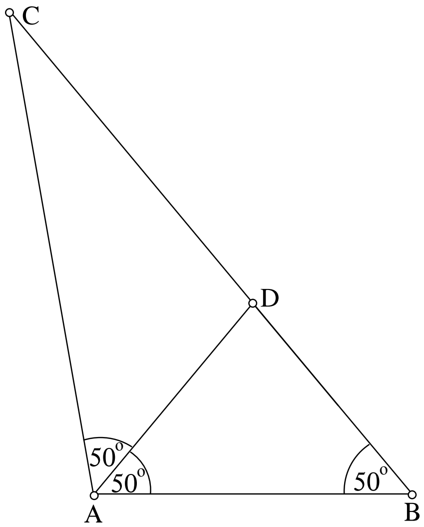
   $$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 75°.$$



b) Die Abbildung zeigt ein gesuchtes Dreieck.

Bemerkungen: Ein (beschreibender oder begründender) Text zur Konstruktion wird nicht vom Schüler verlangt.

Da wie in a) gezeigt werden kann, daß $\alpha = 2\beta$ gelten muß, genügt es, $\sphericalangle BAC$ durch Verdoppeln eines zu $\sphericalangle ABD$ gleichgroßen Winkels zu konstruieren. Das Einzeichnen der Mittelsenkrechten ist dann nicht erforderlich.



c) Wenn es ein Dreieck der genannten Art gäbe, so würde wie in a) folgen, daß $\alpha = 2\beta = 120°$ wäre. Damit wäre

$$\alpha + \beta + \gamma > \alpha + \beta = 120° + 60° = 180°$$

im Widerspruch zum Innenwinkelsatz.

2. Lösungsmöglichkeit: Wenn es ein solches Dreieck gäbe, so müßte es wie in b) konstruiert werden können. Die Konstruktion ergäbe aber (nach der Umkehrung eines Satzes über geschnittene Parallelen): Wegen $120° + 60° = 180°$ wäre der zweite Schenkel des durch Verdoppeln entstehenden Winkels bei A parallel zu BD, also käme kein Schnittpunkt C und damit kein Dreieck ABC zustande.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340713:

I. Wenn die Aussagen (1), (2) und (3) für eine natürliche Zahl z gelten, so folgt:

Nach (3) ist z gerade, hat also eine gerade Einerziffer.

Nach (1) ist folglich die Zehnerziffer ungerade. Durch Verdoppeln entsteht aus ihr nach (2) die Hunderterziffer, also eine Zahl kleiner als 10. Daher ist die Zehnerziffer kleiner als 5 und folglich eine der Zahlen 1; 3.

Wegen (1) und (2) folgt damit: Die letzten drei Ziffern von z können nur entweder 212 oder 634 sein.

Wären sie 212, so wäre die mit den letzten zwei Ziffern von z gebildete Zahl durch 4 teilbar; also wäre z durch 4 teilbar und daher (sowie wegen $z > 4$) nicht das Doppelte einer Primzahl. Somit können die letzten drei Ziffern von z nur 634 sein.

Die erste Ziffer von z kann keine der Ziffern 2, 5, 8 sein; denn hierfür hätte z eine durch 3 teilbare Quersumme und wäre folglich durch 3 teilbar, könnte also (wegen $z > 6$) nicht das Doppelte einer Primzahl sein. Wäre die erste Ziffer von z eine der Zahlen 1, 3, 4, 6, 7, so würde ebenfalls die Aussage (3) nicht gelten, wie die folgenden Rechnungen zeigen:

z	Zerlegung von $z:2$		
1 634	817	=	$19 \cdot 43$
3 634	1 817	=	$23 \cdot 79$
4 634	2 317	=	$7 \cdot 331$
6 634	3 317	=	$31 \cdot 107$
7 634	3 817	=	$11 \cdot 347$

Damit verbleibt nur die Möglichkeit $z = 9\,634$.

II. Für $z = 9\,634$ sind (1) und (2) erfüllt, ferner gilt auch (3), da $z : 2 = 4\,817$ eine Primzahl ist, wie man folgendermaßen zeigen kann:

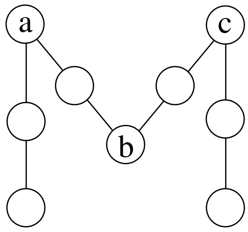
Wegen $4\,817 < 4\,900 = 70^2$ müßte die Zahl 4 817, wenn sie zerlegbar wäre, einen Primfaktor kleiner als 70 enthalten. Man kann jedoch (z.B. durch Nutzung eines Taschenrechners) feststellen, daß 4 817 durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67 teilbar ist.

Mit I. und II. ist nachgewiesen, daß es genau eine vierstellige natürliche Zahl gibt, für die (1), (2) und (3) gelten, und diese Zahl ist als $z = 9\,634$ ermittelt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340714:

Für jede geforderte Eintragung der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gilt:



Addiert man die vier im Aufgabentext genannten (einander gleichen) Summen, so werden dabei die Zahlen a, b, c (siehe Abbildung rechts) je zweimal, die anderen Zahlen je einmal als Summanden herangezogen. Also gilt

$$4s = 1 + 2 + ... + 9 + a + b + c \qquad (1)$$

Die Summe s ist folglich für diejenigen Eintragungen am kleinsten bzw. am größten, für die $a + b + c$ am kleinsten bzw. am größten ist.

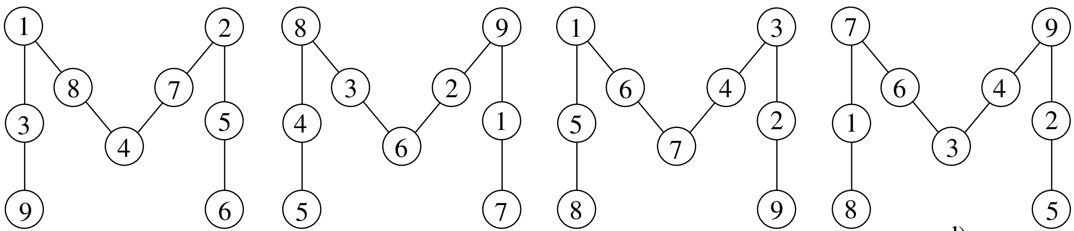
a) Die kleinstmögliche Summe aus drei verschiedenen der Zahlen 1, 2, ..., 9 ist 1 + 2 + 3=6. Wäre eine Eintragung mit diesen Zahlen als a, b, c möglich, so folgte aus (1) die Gleichung $4s = 45 + 6$, die mit ganzzahligem s nicht erfüllbar ist.

   Die nächstgrößere Möglichkeit $1 + 2 + 4 = 7$ führt auf $4s = 45 + 7 = 52$, also $s = 13$. Wie Abbildung a zeigt, ist dieser Wert s durch eine Eintragung erreichbar. Damit ist also 13 als kleinster Wert s bewiesen, und eine zugehörige Eintragung ist angegeben.

b) Die größtmögliche Summe aus drei verschiedenen der Zahlen 1, 2, ..., 9 ist $7 + 8 + 9 = 24$. Wieder ist eine Eintragung mit diesen a, b, c nicht möglich, da (1) auf $4s = 45 + 24$ führen würde.

   Die nächstkleinere Möglichkeit $6+8+9 = 23$ mit $45 = 45+23 = 68$, $s = 17$ ist durch eine Eintragung erreichbar; siehe z.B. Abbildung b.

c) Auch mit $s = 14$ und mit $s = 16$ sind Eintragungen möglich, wie Abbildungen c und d zeigen. Dagegen gibt es keine Eintragung mit $s = 15$. Für eine solche müßte nach (1) nämlich $60 = 45 + a + b + c$, also auch $a + b + c = 5$ sein. In das Feld zwischen a und b müßte folglich wegen $s = 15$ wieder die Zahl c kommen, was der Verschiedenheit der einzutragenden Zahlen widerspricht.



a) b) c) d)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission