Umlauft

L 11,12; I

IV. Olympiade der Jungen Mathematiker
der DDR 1965

Lösungshinweise und Punktbewertungstabelle

Bezirksolympiade-Olympiadeklasse 11 und 12 - 1.Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungshinweisen der 1. Stufe gelten auch für die Bezirksolympiade.

041331

1. Angenommen, die Auskunft 2 sei wahr, dann ist auch die Auskunft 1 wahr. Das ist aber nach der obigen Voraussetzung unmöglich. Also ist die Auskunft 1 wahr und die Auskunft 2 falsch. Da die Auskunft 1 wahr ist, ist die Auskunft 3 falsch und die Auskunft 4 wahr. 5 Punkte

a ist also eine der Zahlen

$$\ldots, -35, -21, -7, 7, 21, 35, \ldots, 7\,(2n+1), \ldots$$

(n ganze Zahl)

Nun ist die Auskunft 2 falsch, also ist auch die Auskunft 6 falsch und die Auskunft 5 richtig.

Die Zahl a ist also positiv.

Nun ist $7^3 + 7 < 8\,000$,

jedoch bereits

$$21^3 + 21 > 20^3 + 20 > 8\,000.$$

Also folgt

$$a = 7.$$

041332

2. Funktionen der Form $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ mit $c \neq 0$ sind definiert in den Intervallen 7 Punkte

I_1: $-\infty < x < -\frac{d}{c}$ und I_2: $-\frac{d}{c} < x < \infty$.

Es seien x_1 und x_2 Zahlen des Intervalls I_1 mit $x_1 < x_2$, d.h. $x_1 < x_2 < -\frac{d}{c}$.

Es gilt:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{ax_1+b}{cx_1+d} - \frac{ax_2+b}{cx_2+d} = \frac{(x_1-x_2)(ad-bc)}{(cx_1+d)(cx_2+d)} .$$

Aus $x_i < -\frac{d}{c}$ $(i = 1,2)$ folgt für $c > 0$

$cx_i < -d$, $cx_i + d < 0$, also $(cx_1+d)(cx_2+d) > 0$.

Für $c < 0$ erhält man $(cx_1+d) > (cx_2+d) > 0$

Bestell-Nr. 30 01 65-1

und mithin ebenfalls

$$(cx_1 + d)\,(cx_2 + d) > 0.$$

Da $x_1 - x_2 < 0$ ist, gilt $f(x_2) - f(x_1) < 0$ genau dann, wenn $ad - bc < 0$ ist.

Analog lässt sich der Beweis führen, wenn x_1 und x_2 Elemente des Intervalls I_2 sind.

Ergebnis:

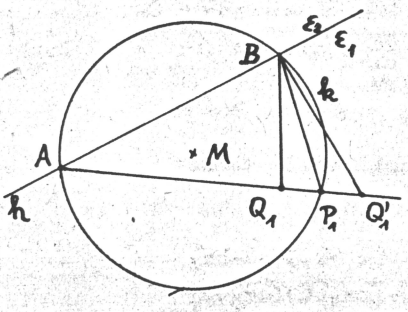
Funktionen der Form $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ mit $c \neq 0$ sind in jedem Definitionsintervall genau dann streng monoton fallend, wenn $ad-bc < 0$ gilt.

041333 3. Es seien k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M in der Ebene ε, A und B zwei seiner Punkte. Die durch A und B bestimmte Gerade h zerlege die Ebene ε in die beiden Halbebenen ε_1 und ε_2 (h gehöre weder zu ε_1 noch zu ε_2). Das Innere des Kreises k heisse $\mathfrak{K}$, das Äussere $\mathfrak{K}'$ (k gehöre weder zu $\mathfrak{K}$ noch zu $\mathfrak{K}'$). 8 Punkte

Wir beweisen zuerst einen Hilfssatz:

Für alle Punkte $Q_1 \in \varepsilon_1 \cap \mathfrak{K}$ und für alle Punkte $P_1 \in \varepsilon_1 \cap k$ sowie für alle Punkte $Q_1' \in \varepsilon_1 \cap \mathfrak{K}'$ gilt

$$\sphericalangle AQ_1B > \sphericalangle AP_1B > \sphericalangle AQ_1'B.$$



Beweis: Ist $Q_1 \in \varepsilon_1 \cap \mathfrak{K}$, so gibt es eine Gerade durch A und Q_1. Sie schneidet k ausser in A noch im Punkt P_1. Dann ist

$$\sphericalangle AQ_1B > \sphericalangle AP_1B,$$

weil der Aussenwinkel $\sphericalangle AQ_1B$ im Dreieck ΔQ_1P_1B grösser als der Innenwinkel $\sphericalangle Q_1P_1B$ ist. Ist $Q_1 \in \varepsilon_1 \cap \mathfrak{K}'$, so folgt analog $\sphericalangle AP_1B > \sphericalangle AQ_1'B$.

Liegt der Mittelpunkt M von k auf h, so sind

die Peripheriewinkel $\sphericalangle AP_iB$ ($P_i \in \mathcal{E}_i \cap k, i=1,2$) alle rechte Winkel (Satz von Thales).

Liegt M nicht auf h, so sei $M \in \mathcal{E}_1$. Der Peripheriewinkel $\sphericalangle AP_1B$ heisse "ausgezeichneter" Peripheriewinkel. Es gilt dann:

Von zwei Kreisen durch A und B hat derjenige mit dem kleineren Radius den grösseren ausgezeichneten Peripheriewinkel.

<u>Beweis:</u> Es genügt, den Fall zu betrachten, in dem die Mittelpunkte beider Kreise in $\mathcal{E}_1$ liegen. Die Behauptung ist dann eine Folgerung aus dem soeben bewiesenen Hilfssatz.

Die Punkte A, B bestimmen die Gerade h.

<u>Analysis:</u> $P \in g$ sei ein Punkt, der die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft hat. P liegt dann nicht auf h. Die Punkte A, B, P liegen auf einem Kreis k, der die Gerade g berührt. Andernfalls gäbe es nämlich ausser P noch einen Schnittpunkt R von g mit k, und für die Punkte S der Strecke PR wäre nach dem Hilfssatz

$$\sphericalangle ASB > \sphericalangle APB.$$

<u>Konstruktion:</u>

a) $h \parallel g$. Die Mittelsenkrechte von AB schneidet g in P. P ist der gesuchte Punkt, da durch A, B, P der einzige Kreis durch A, B bestimmt ist, der g berührt. Nach dem Hilfssatz hat P die geforderte Eigenschaft.

b) h und g haben einen Punkt gemeinsam, der C genannt werde. Die Bezeichnung sei so gewählt, dass B zwischen A und C liege. Die in B auf h errichtete Senkrechte schneide einen über AC als Durchmesser gezeichneten Halbkreis im Punkt D. Der Kreis mit dem Radius CD um C schneide die Gerade g in den Punkten P_1 und P_2.

Durch A, B, P_1 bzw. A, B, P_2 lassen sich Kreise k_1, k_2 konstruieren, die g berühren. Nach dem Satz von Thales hat nämlich das Dreieck Δ ACD bei D einen rechten Winkel und nach dem Kathetensatz ist $\overline{CD}^2 = \overline{CA} \cdot \overline{CB}$. Für die Punkte P_1 und P_2 gilt $\overline{CP}^2 = \overline{CA} \cdot \overline{CB}$; denn nach dem Sekanten-Tangenten-Satz ist g Tangente, und die Punkte P_1, P_2 sind die Berührungspunkte der Kreise k_1 bzw. k_2.

Haben die Kreise k_1 und k_2 den gleichen Radius, so erfüllen P_1 und P_2 die geforderte Bedingung. Andernfalls ist der Berührungspunkt des Kreises mit dem kleineren Radius der gesuchte Punkt. Das folgt aus dem o.a. Hilfssatz.

Umlauft

L 11,12; II

IV. Olympiade der Jungen Mathematiker
der DDR 1965

Lösungshinweise und Punktbewertungstabelle

Bezirksolympiade - Olympiadeklasse 11 und 12, 2. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungshinweisen der 1. Stufe gelten auch für die Bezirksolympiade.

4. Angenommen, x sei eine reelle Zahl, für die 5 Punkte

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 6 \qquad (1)$$

ist. Dann gilt wegen $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ auch

$$\tan^4 x - 6 \tan^2 x + 1 = 0 .$$

Für eine reelle Zahl x mit der Eigenschaft (1) ist also entweder

$$\tan^2 x = 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{oder} \qquad (2)$$

$$\tan^2 x = 3 - 2\sqrt{2}$$

Da $\tan^2 x = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$ gilt,

erhält man wegen (2) entweder

$$\cos^2 x = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \quad \text{oder}$$

$$\cos^2 x = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

und, da

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \quad \text{gilt,}$$

entweder

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{oder}$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}\sqrt{2} .$$

Mithin ist für die reellen Zahlen x, die (1)
die Gleichung (1) erfüllen, notwendig

$$2x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \text{ d.h. } x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} ,$$

wobei k eine ganzrationale Zahl ist.

Tatsächlich erhält man wegen

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{2}{1 + \cos 2x} - 1$$

für

$$2x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Bestell-Nr. 30 01 65-1

$$\tan^2 x = \frac{2}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}} - 1 = 3-2\sqrt{2} \text{ für } k \equiv 0 \bmod 4$$
$$\text{bzw. } k \equiv 3 \bmod 4$$
$$\tan^2 x = \frac{2}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}} - 1 = 3+2\sqrt{2} \text{ für } k \equiv 1 \bmod 4$$
$$\text{bzw. } k \equiv 2 \bmod 4$$

Also gilt für $2x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 3 - 2\sqrt{2} + \frac{1}{3-2\sqrt{2}} =$$
$$3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} = 6 \text{ für } k \equiv 0 \bmod 4$$
$$\text{bzw. } k \equiv 3 \bmod 4$$

und

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 3 + 2\sqrt{2} + \frac{1}{3+2\sqrt{2}} =$$
$$3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 6 \text{ für } k \equiv 1 \bmod 4$$
$$\text{bzw. } k \equiv 2 \bmod 4$$

<u>Ergebnis:</u>

Die Gleichung (1) wird genau von allen reellen Zahlen

$$x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \text{ (k ganzrational)}$$

erfüllt.

5. Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Darstellungen einer Zahl z in der verlangten Form, dann wäre 7 Punkte

$$x_1! + y_1! = x_2! + y_2! \qquad (1)$$

mit

$$x_1 \leqq y_1 \text{ und } x_2 \leqq y_2 .$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man $x_1 < x_2$ annehmen und setzen

$$x_2 = x_1 + k , \quad y_2 = x_2 + m,$$

wobei k, m natürliche Zahlen und $k > 0$, $m \geqq 0$ sind.

a) Ist $x_1 < y_1$, so setzt man $y_1 = x_1 + h$ mit einer natürlichen Zahl $h > 0$. Aus (1) folgt

$$x_1! \left[1 + (x_1+1)\ldots(x_1+h)\right] =$$
$$x_1! \; (x_1+1)\ldots(x_1+k)\cdot(1+n), \qquad (2)$$

wobei entweder $n = 1$ oder

$$n = (x_1+k+1)\dots(x_1+k+m) \text{ ist.}$$

Aus (2) folgt wegen $x_1 \neq 0$

$$1 + (x_1+1)\dots(x_1+h) = (x_1+1)\dots(x_1+k)(1+n) \qquad (3)$$

Das führt aber zu einem Widerspruch, da die linke Seite der Gleichung (3) nicht durch x_1+1 teilbar ist.

b) Ist $x_1 = y_1$, so folgt aus (1)

$$2\ x_1! = x_1!\ (x_1+1)\dots(x_1+k)(1+n) \qquad (4)$$

also

$$2 = (x_1+1)\dots(x_1+k)(1+n) \qquad (5)$$

Aber auch diese Gleichung führt wegen $x_1 + 1 \geqq 2$ und $1 + n \geqq 2$ zu einem Widerspruch.

<u>Ergebnis:</u>

Da die Gleichungen (3) und (5) nicht erfüllt sein können, folgt: Wenn es überhaupt eine Darstellung der natürlichen Zahl z in der verlangten Form gibt, so gibt es nur <u>eine</u> Darstellung.

6. Wir setzen als bekannt voraus, dass eine Kugel durch 4 Punkte, die nicht in einer Ebene liegen, eindeutig bestimmt ist. 8 Punkte

Die drei Kreise werden mit k_1, k_2, k_3 bezeichnet. Der Mittelpunkt des Kreises k_i, der in der Ebene ε_i liegen möge, heisse M_i ($i = 1, 2, 3$). Nach Voraussetzung haben die Kreise k_i und k_j ($i \neq j$) genau einen Punkt P_k und in diesem die Tangente t_k gemeinsam (i, j, k ist eine Anordnung der Zahlen 1, 2, 3). Die Senkrechte auf der Ebene ε_i im

Punkt M_i heisse g_i. Die Ebene durch P_3, die senkrecht zur Tangente t_3 ist, enthält die Punkte M_1 und M_2, sowie die Geraden g_1 und g_2.

a) Sind die Geraden g_1 und g_2 parallel, so liegen k_1 und k_2 in ein und derselben Ebene $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Daher liegen auch die gemeinsamen Tangenten t_1 bzw. t_2 von k_2 und k_3 bzw. k_3 und k_1 in dieser Ebene. Da die Tangenten t_1 und t_2 des Kreises k_3 verschieden voneinander sind, liegt auch k_3 in der Ebene ε_1.

b) Haben die Geraden g_1 und g_2 den Punkt N_3 gemeinsam, so gilt, dass alle Punkte der Kreise k_1 und k_2 den gleichen Abstand von N_3 haben, also auf einer Kugel um N_3 liegen. Durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 erhält man entsprechende Aussagen für die Kreispaare (k_2, k_3) und (k_3, k_1).

Auf den Kugeln K_3 und K_1 liegen der Kreis k_2 und der Punkt P_2. Weil von den Kreisen k_i nicht zwei in einer Ebene liegen, ist P_2 kein Punkt der Ebene ε_2, also bestimmen P_2 und k_2 eindeutig eine Kugel, d.h. $K_3 = K_1$. Durch zyklische Vertauschung erhält man $K_1 = K_2$, d.h. die drei Kreise k_1, k_2, k_3 liegen auf <u>einer</u> Kugel.