

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

7;1. Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 2555, jede genau einmal, aufgeschrieben.

Ermittle die Anzahl der Ziffern 9, die dabei insgesamt geschrieben werden müßten!

7;2. Die Maßzahlen a , b , c der Seitenlängen eines Dreiecks sollen die Bedingungen

$$(I) \quad a + b = 38,$$

$$(II) \quad b + c = 46,$$

$$(III) \quad a + c = 42$$

erfüllen.

Ermittle unter Berücksichtigung dieser Bedingungen

a) die Maßzahl jeder der Seitenlängen!

b) Weise nach, daß ein Dreieck existiert, das den Bedingungen (I), (II), (III) genügt!

(Gleiche Maßeinheiten seien wie üblich vorausgesetzt.)

7;3. Beweise folgenden Satz:

Ist ABCD ein konvexes Viereck, so ist seine Fläche inhaltsgleich der Fläche jedes Dreiecks, bei dem zwei Seiten gleichlang den Diagonalen des Vierecks sind und als Winkel einen der Schnittwinkel der Diagonalen einschließen.

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

- 7;4. Bei einer Subtraktionsaufgabe betrage der Subtrahend $\frac{2}{5}$ des (von Null verschiedenen) Minuenden.
- Wieviel Prozent des Minuenden beträgt die Differenz?
 - Wieviel Prozent des Minuenden beträgt die Summe aus Minuend und Subtrahend?
- 7;5. Beweise folgenden Satz: Zieht man durch jeden Eckpunkt eines Rechtecks die Parallele zu derjenigen Diagonale, auf der der betreffende Eckpunkt nicht liegt, so bilden die Schnittpunkte dieser vier Parallelen die Ecken eines Rhombus.
- 7;6. Konstruiere einen Rhombus ABCD aus $\sphericalangle BAD = 110^\circ$ und $\overline{AC} + \overline{BD} = 15 \text{ cm!}$
($\sphericalangle BAD$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle BAD$)

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die
1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

7;1. Lösung:

5 Punkte

I. In der Tausenderstelle der aufgeschriebenen Zahlen kommt die Ziffer 9 nicht vor.

II. Die Anzahl der Ziffern 9, die in der Hunderterstelle der aufgeschriebenen Zahlen vorkommen, beträgt

für die Zahlen von 1 bis 1000) (2 Gruppen)
für die Zahlen von 1001 bis 2000)

je genau 100 (da bei der ersten Gruppe die 9 in der Hunderterstelle genau der Zahlen 900, ..., 999 vorkommt und bei der zweiten Gruppe genau der Zahlen 1900, ..., 1999).

Bei den Zahlen von 2001 bis 2555 kommt in der Hunderterstelle die Ziffer 9 nicht vor.

III. Die Anzahl der Ziffern 9, die in der Zehnerstelle der aufgeschriebenen Zahlen vorkommen, beträgt

für die Zahlen von 1 bis 100)
für die Zahlen von 101 bis 200)
usw.) (25 Gruppen)
für die Zahlen von 2401 bis 2500)

je genau 10 (bei der ersten Gruppe genau in 90, ..., 99, bei der zweiten genau in 190, ..., 199 usw.).

Bei den Zahlen von 2500 bis 2555 kommt in der Zehnerstelle die 9 nicht vor.

IV. Die Anzahl der Ziffern 9 in der Einerstelle der Zahlen beträgt

für die Zahlen von 1 bis 10)
für die Zahlen von 11 bis 20)
usw.) (255 Gruppen)
für die Zahlen von 2541 bis 2550)

je genau 1. Bei den Zahlen von 2551 bis 2555 kommt in der Einerstelle die 9 nicht vor.

L 7;I

V. Daher beträgt die gesuchte Zahl

$$2 \cdot 100 + 25 \cdot 10 + 255 = 705.$$

7;2. Lösung:

7 Punkte

a) Wenn die Bedingungen (I), (II), (III) erfüllt sind, so folgt (durch irgend eine Eliminationsmethode, z. B. durch Addition von (I), (II), (III), Division durch 2 und anschließende Subtraktion je einer der Gleichungen (I), (II), (III))

$$a = 17, \quad b = 21, \quad c = 25.$$

b) Ein Dreieck mit diesen Maßzahlen existiert; denn die Dreiecksungleichungen sind erfüllt. Es ist nämlich

$$17 + 21 > 25, \text{ also } a + b > c,$$

$$21 + 25 > 17, \text{ also } b + c > a,$$

$$17 + 25 > 21, \text{ also } a + c > b.$$

Jedes Dreieck mit diesen Maßzahlen seiner Seitenlängen erfüllt auch die Bedingungen (I), (II), (III).

Es ist nämlich

$$17 + 21 = 38, \text{ also } a + b = 38,$$

$$21 + 25 = 46, \text{ also } b + c = 46,$$

$$17 + 25 = 42, \text{ also } a + c = 42.$$

Zu a) Man kann auch folgendermaßen schließen:

Aus $b + c = 46$ und $a + c = 42$ folgt, daß b um 4 größer ist als a .

Also gilt $b = a + 4$ (1)

Setzt man das in (I) ein, so erhält man

$a + a + 4 = 38$, woraus $a = 17$ folgt.

Aus (1) folgt dann $b = 21$ und daraus sowie aus (III) $c = 25$... usw.

7;3. Lösung:

8 Punkte

Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen. Man zieht die Parallelen zu den Diagonalen durch die Punkte A, B, C und D . Sie mögen sich in den Punkten E, F, G, H schneiden. Dann ist $EFGH$ laut Konstruktion ein Parallelogramm, dessen Fläche bei geeigneter

Wahl der Bezeichnungen E, F, G, H aus den Flächen der vier Parallelogramme AMDH, BMAE, CMBF und DMCG zusammengesetzt ist. Da diese Teilparallelogramme durch die Strecken AB, BC, CD und DA halbiert werden, ist der Flächeninhalt des Parallelogramms EFGH doppelt so groß wie der des Vierecks ABCD. Daher ist der Flächeninhalt jedes Dreiecks, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht und folglich einem der Dreiecke $\triangle EFG$, $\triangle EFH$ kongruent ist, jeweils gleich dem des Vierecks ABCD.

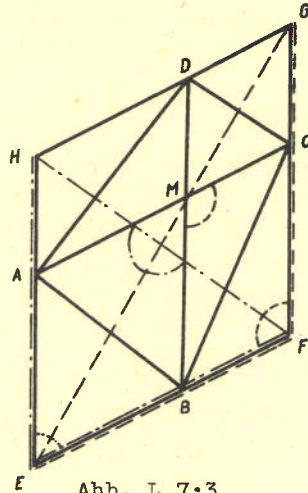


Abb. L 7;3

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die
 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

7;4. Lösung:

- a) Bezeichnet man den Minuenden mit m ($m \neq 0$), 3 Punkte
 dann ist der Subtrahend $\frac{2}{5} m$.

Die Differenz ist $m - \frac{2}{5} m = \frac{3}{5} m$.

Wegen $\frac{3}{5} m = \frac{60}{100} m$ beträgt die Differenz 60 % des
 Minuenden.

- b) Die Summe aus Minuend und Subtrahend ist 3 Punkte

$$m + \frac{2}{5} m = \frac{7}{5} m.$$

Wegen $\frac{7}{5} m = \frac{140}{100} m$ beträgt diese Summe 140 % des

Minuenden. insgesamt 6 Punkte

7;5. Lösung:

6 Punkte

Voraussetzung: ABCD ist ein Rechteck,

E, F, G, H sind so gelegen, daß A auf EF, B auf FG,

C auf GH, D auf HE liegt und $FG \parallel AC \parallel EH$ sowie $EF \parallel DB \parallel HG$
 gilt.

Behauptung: EFGH ist ein Rhombus.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist EFB D ein Parallelogramm, also

gilt $\overline{EF} = \overline{DB}$. Ebenso erhält man: $\overline{HG} = \overline{DB}$, $\overline{FG} = \overline{AC}$,
 $\overline{EH} = \overline{AC}$.

Da im Rechteck ABCD ferner $\overline{AC} = \overline{DB}$ gilt, folgt aus
 den vorigen Gleichungen $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{HG} = \overline{EH}$ und damit
 die Behauptung.

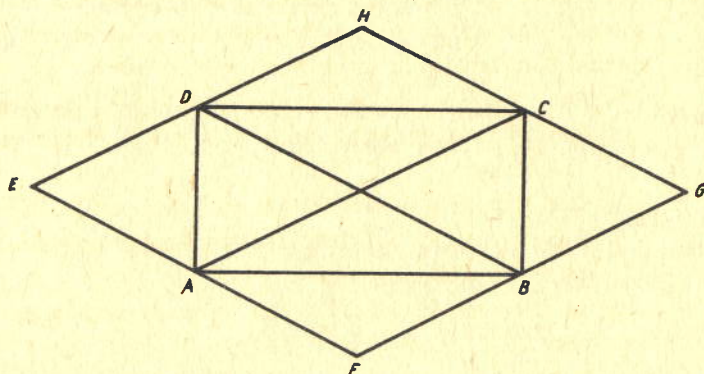


Abb. L 7;5

7;6. Lösung:

8 Punkte

I. Angenommen, ABCD sei ein Rhombus, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht, M sei sein Mittelpunkt. Dann ist AM die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAD$, ferner gilt $AM \perp BD$ sowie $\overline{MB} = \overline{MD}$. Schließlich ist $\overline{AM} + \overline{MB} = \frac{1}{2} (\overline{AC} + \overline{BD})$.

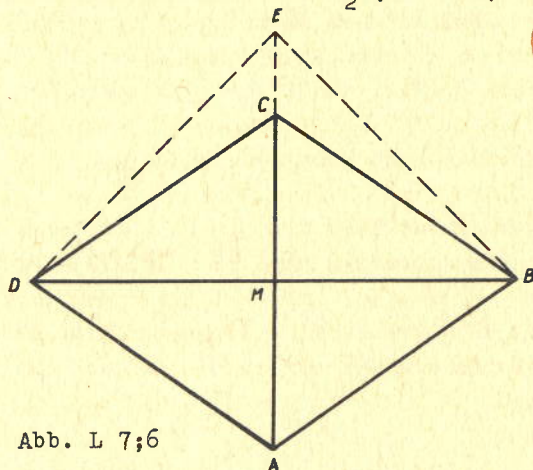


Abb. L 7;6

Der Punkt E sei so auf der Verlängerung von AM über M hinaus gelegen, daß $\overline{ME} = \overline{MB}$ ist.

Dann ist $\triangle MBE$ gleichschenkelig-rechtwinklig, also $\sphericalangle MEB = 45^\circ$.

Ebenso ist auch $\sphericalangle MED = 45^\circ$.

II. Daraus folgt, daß ein Rhombus nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

- (1) Man zeichnet einen Winkel von 110° , dessen Scheitel A genannt sei, und seine Winkelhalbierende.
- (2) Auf ihr trägt man von A aus eine Strecke von 7,5 cm Länge ab. Der zweite Endpunkt dieser Strecke sei E genannt.
- (3) An den von E durch A gehenden Strahl trägt man in E nach beiden Seiten Winkel von 45° an. Schneiden ihre freien Schenkel die Schenkel der unter (1) genannten Winkel, so seien die Schnittpunkte B und D.
- (4) Schneidet der Kreis um D mit dem Radius \overline{AD} den von A durch E gehenden Strahl außer in A in einem weiteren Punkt, so sei dieser C genannt.

III. Beweis, daß diese Konstruktion zu einem Rhombus der gesuchten Art führt:

Nach Konstruktion wird $\triangle AEB \cong \triangle AED$ (wsw), also $\overline{AB} = \overline{AD}$. Hieraus folgt, wenn M der Schnittpunkt von AE und BD ist, $\triangle AMB \cong \triangle AMD$ (sws), also $\sphericalangle BMA = \sphericalangle DMA = 90^\circ$.

Demnach gilt $\triangle DMA \cong \triangle DMC$ (ssw; $\overline{AD} > \overline{MD}$), also $\overline{AD} = \overline{CD}$, $\overline{AM} = \overline{CM}$ und somit schließlich $\triangle AMB \cong \triangle CMB$ (sws), $\overline{AB} = \overline{CB}$.

Daher ist ABCD ein Rhombus.

In diesem gilt nach Konstruktion $\sphericalangle BAD = 110^\circ$

Ferner ist $\sphericalangle BME = 90^\circ$ und nach Konstruktion $\sphericalangle BEM = 45^\circ$, also $\triangle MBE$ gleichschenkelig-rechtwinklig mit $\overline{BM} = \overline{EM}$. Somit ist auch

$\overline{AC} + \overline{BD} = 2 \cdot (\overline{AM} + \overline{EM}) = 2 \cdot (\overline{AM} + \overline{EM}) = 2 \cdot \overline{AE} = 15 \text{ cm}$, wie verlangt.

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2) sind (bis auf Kongruenz) eindeutig durchführbar.

Dasselbe gilt für (3), da $\frac{110^\circ}{2} < 90^\circ$ ist.