XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1031) Für ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ sei die Höhenlänge $\overline{CD} = h$ und die Basislänge $\overline{AB} = g$ genannt. Ferner sei dem Dreieck ein Quadrat EFGH derart einbeschrieben, daß EF auf AB, G auf BC und H auf AC liegen.
Ermitteln Sie alle Verhältnisse $h : g$, für die sich die Flächeninhalte von Dreieck $\triangle ABC$ und Quadrat EFGH wie $9 : 4$ verhalten.

1032) Es sei $ABCDA'B'C'D'$ ein Parallelepiped, d. i. ein nicht notwendig gerades vierseitiges Prisma mit einem Parallelogramm ABCD als Grundfläche.
Es ist die Menge aller derjenigen Punkte X zu ermitteln, die als Schnittpunkte von Strecken PR und ST auftreten können, wenn P ein Punkt auf AB, R ein Punkt auf $C'D'$, S ein Punkt auf AD und T ein Punkt auf $B'C'$ ist (Abb. A 1032).

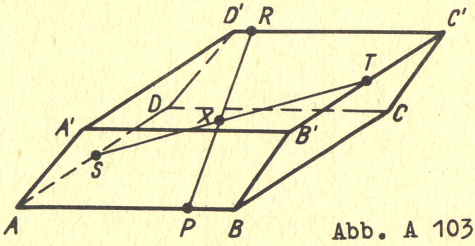


Abb. A 1032

A 10;I

1033) Man denke sich alle Primzahlen, beginnend mit der Primzahl 5, der Größe nach fortlaufend numeriert, es mögen also numeriert sein:

Primzahl	5	7	11	13	17	19	.	.	.
Nummer	1	2	3	4	5	6	.	.	.

Es ist zu beweisen, daß dann jede Primzahl größer als das Dreifache ihrer Nummer ist.

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1034) Ein Lokomotivführer bemerkte am Anfang eines 20 km langen Streckenabschnitts s, daß er eine Verspätung von genau 4 min hatte. Er fuhr daraufhin diese Strecke s mit einer um 10 km/h höheren Durchschnittsgeschwindigkeit, als sie der Fahrplan vorsah. Am Ende der Strecke s war erstmalig wieder Übereinstimmung mit dem Fahrplan erreicht.
Wie groß war die für s vorgesehene fahrplanmäßige Durchschnittsgeschwindigkeit?

1035) Beweisen Sie, daß

$$\lg\left(1-\frac{1}{25^2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{26^2}\right)+\ \ldots\ +\lg\left(1-\frac{1}{99^2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{100^2}\right) = \lg\frac{606}{625}$$

gilt!

1036) Beweisen Sie den folgenden Satz:
Hat der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks eine Größe von 36°, so ist die Basis des Dreiecks genau so lang wie der größere Abschnitt auf einem nach dem "goldenen Schnitt" geteilten Schenkel des Dreiecks.

Anmerkung:
Eine Strecke heißt nach dem "goldenen Schnitt" in zwei Abschnitte geteilt, wenn die Länge des größeren Abschnitts die mittlere Proportionale zwischen der Länge des kleineren Abschnitts und der Länge der gesamten Strecke ist.

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1031) **Lösung:** 6 Punkte

Sind D und M die Mittelpunkte von AB bzw. HG, dann gilt mit $\overline{EF} = a$ nach dem Strahlensatz $\overline{AB} : \overline{HG} = \overline{CD} : \overline{CM}$, also

$g : a = h : (h-a)$, $ah = gh - ag$,

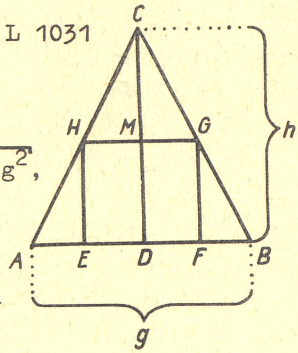
$a = \frac{g \cdot h}{g + h}$ (1).

Angenommen nun, h:g sei ein solches Verhältnis, wie es in der Aufgabe verlangt wird. Dann ist $\frac{1}{2}gh$ der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ und a^2 der des Quadrates EFGH, also gilt $\frac{1}{2}gh : a^2 = 9 : 4$ und daher $2gh - 9a^2 = 0$ (2).

Setzt man (1) in (2) ein, so erhält man

$2gh - \frac{9g^2h^2}{(g+h)^2} = 0$,

Abb. L 1031



$2(g^2 + 2gh + h^2) - 9gh = 0$, also die Gleichung (3) $h^2 - \frac{5}{2}gh + g^2 = 0$, die genau die Lösungen $h_{1;2} = \frac{5}{4}g \pm \sqrt{\frac{25}{16}g^2 - g^2}$, d.h. $h_1 = 2g$ und $h_2 = \frac{1}{2}g$ hat.

Also können höchstens die Verhältnisse h:g = 2:1 und h:g = 1:2 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Umgekehrt gilt*):

Aus $h_1 = 2g$ folgt wegen (1) $a_1 = \frac{2}{3}g$. Ebenso folgt aus $h_2 = \frac{1}{2}g$ wegen (1) $a_2 = \frac{1}{3}g$.

Daher ergibt sich in den genannten Fällen:

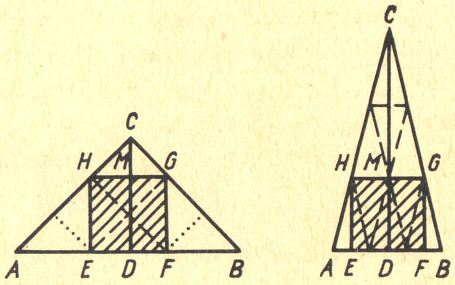
$\frac{1}{2}gh : a^2 = \frac{1}{2}g \cdot 2g : (\frac{2}{3}g)^2 = g^2 : \frac{4}{9}g^2 = 9 : 4$ bzw.

$\frac{1}{2}gh : a^2 = \frac{1}{2}g \cdot \frac{1}{2}g : (\frac{1}{3}g)^2 = \frac{1}{4}g^2 : \frac{1}{9}g^2 = 9 : 4$, wie es ge-

*) Man kann den folgenden Nachweis auch dadurch erbringen, daß man die bisherigen Schlüsse umkehrt.

fordert war. Es gibt mithin genau zwei Verhältnisse h:g, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, nämlich h:g = 1:2 und h:g = 2:1.
Abb. L 1031a zeigt zwei derartige Dreiecke (wird vom Schüler nicht verlangt)

Abb. L 1031 a



1032) <u>Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Die Ebene ε durch A,B,C′ geht auch durch D′; denn ABC′D′ ist ein Parallelogramm. Jede Strecke PR mit P auf AB und R auf C′D′ liegt in ε. Die Ebene η durch D,A,B′ geht auch durch C′; denn DAB′C′ ist ein Parallelogramm. Jede Strecke ST mit S auf AD und T auf B′C′ liegt in η. Die Punkte A und C′ gehören ε und η an, B dagegen ε und nicht η, also haben ε und η genau die Gerade durch A und C′ gemeinsam. Ist nun ein Punkt X Schnittpunkt von PR und ST, so liegt X im Parallelepiped, in ε und in η, also im Durchschnitt dieser drei Mengen, d.h. auf der Strecke AC′. Liegt umgekehrt ein Punkt X auf AC′, d.h. auf der gemeinsamen Diagonalen der Parallelogramme ABC′D′ und DAB′C′, so schneiden z.B. die Parallelen durch X zu AD′ bzw. AB′ die Strecken AB und C′D′ bzw. AD und B′C′ in Punkten P,R bzw. S,T, so daß X als Schnittpunkt von PR und ST auftritt. Daher ist die gesuchte Menge die Strecke AC′.

1033) <u>Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Jede natürliche Zahl $z \geqq 5$ ist von einer der Formen $6m-1$, $6m$, $6m+1$, $6m+2$, $6m+3$, $6m+4$ mit natürlichem $m \geqq 1$. Da $6m$, $6m+2$, $6m+4$ durch 2 teilbar und (wegen $z \geqq 5$) größer als 2 sind, und da $6m+3$ durch 3 teilbar und größer als 3 ist, folgt: Jede Primzahl $p \geqq 5$ ist von einer der Formen $6m-1$, $6m+1$ ($m \geqq 1$). Numeriert man alle diese Zahlen auf dieselbe Weise wie die Primzahlen $p \geqq 5$ der Größe nach und bezeichnet dabei die mit der Nummer n versehene Zahl mit f_n, dagegen die Primzahl mit der Nummer n mit p_n, so gilt also

(1) $p_n \geqq f_n \quad (n = 1,2,3,\ldots)$.

Die Zahlen f_n ergeben sich nun, indem man der Reihe nach für jedes $m = 1,2,3,\ldots$ erst $6m-1$ und dann $6m+1$ bildet. Die Nummern n kann man ebenso dadurch erhalten, daß man der Reihe nach für jedes $m = 1,2,3,\ldots$ erst $2m-1$ und dann $2m$ bildet. Da aber für $m = 1,2,3,\ldots$ stets $6m-1 > 3(2m-1)$ und $6m+1 > 3 \cdot 2m$ gelten, ergibt sich

(2) $f_n > 3n \quad (n = 1,2,3,\ldots)$.

Aus (1) und (2) folgt $p_n > 3n$ für alle $n = 1,2,3,\ldots$, w.z.b.w.

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1034) <u>Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Es seien t bzw. t′ die Maßzahlen der in Stunden gemessenen Zeiten für das fahrplanmäßige bzw. für das tatsächliche Durchfahren der Strecke s, ferner seien v bzw. v′ die Maßzahlen der in km/h gemessenen fahrplanmäßigen bzw. tatsächlichen Durchschnittsgeschwindigkeit. Dann gilt

(1) $t \cdot v = 20$ und (2) $t' \cdot v' = 20$, ferner

(3) $t' = t - \frac{1}{15}$ und (4) $v' = v + 10$.

Aus (3) und (1) folgt $t' = \frac{20}{v} - \frac{1}{15}$; setzt man dies in (4) und in (2) ein, so ergibt sich

$(\frac{20}{v} - \frac{1}{15}) \cdot (v + 10) = 20$, also $(300 - v) \cdot (v + 10) = 300v$

(5) $v^2 + 10v - 3000 = 0$. Diese Gleichung hat genau die Lösungen

$v_{1;2} = -5 \pm \sqrt{3025}$, d.h. $v_1 = 50$, $v_2 = -60$.

$= -5 \pm 55$

Wegen $v > 0$ betrug daher die fahrplanmäßige Durchschnittsgeschwindigkeit 50 km/h.

Hinweis zur Korrektur: Da die Erfüllbarkeit der Bedingungen aus der Aufgabenstellung entnommen werden kann, ist eine "Probe" nicht erforderlich.

1035) <u>Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Nach den Logarithmengesetzen läßt sich die linke Seite der Gleichung wie folgt umformen:

$$\lg\left(1-\frac{1}{25^2}\right)+\ldots+\lg\left(1-\frac{1}{100^2}\right) = \lg\left[\left(1-\frac{1}{25^2}\right)\left(1-\frac{1}{26^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100^2}\right)\right].$$

Nach Verwendung einer binomischen Formel ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung also gleich

$$\lg\left[\left(1-\frac{1}{25^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100^2}\right)\right] = \lg\left[\frac{(25-1)(25+1)}{25^2}\cdot\frac{(26-1)(26+1)}{26^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(100-1)(100+1)}{100^2}\right]$$

$$= \lg\left[\frac{24\cdot26\cdot25\cdot27\cdot26\cdot28\cdot27\cdot29\cdot\ldots\cdot96\cdot98\cdot97\cdot99\cdot98\cdot100\cdot99\cdot101}{25^2\cdot26^2\cdot27^2\cdot28^2\cdot\ldots\cdot98^2\cdot99^2\cdot100^2}\right]$$

$$= \lg\left[\frac{24\cdot25\cdot26^2\cdot27^2\cdot\ldots\cdot98^2\cdot99^2\cdot100\cdot101}{25^2\cdot26^2\cdot27^2\cdot\ldots\cdot97^2\cdot98^2\cdot99^2\cdot100^2}\right] =$$

$$= \lg\left(\frac{24\cdot101}{25\cdot100}\right) = \lg\frac{606}{625}, \text{ w.z.b.w.}$$

1036) <u>Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ und $\sphericalangle ACB = 36^\circ$. Dann gilt $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$ und nach dem Winkelsummensatz $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC = 144^\circ$, also $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = 72^\circ$. Die Halbierende des Winkels $\sphericalangle ABC$ schneide AC in D. Dann gilt $\sphericalangle ABD = 36^\circ$, und nach dem Winkelsummensatz, angewandt auf $\triangle ABD$: $\sphericalangle ADB = 72^\circ$. Folglich sind die Dreiecke $\triangle ADB$ und $\triangle BCD$ gleichschenklig, und es gilt $\overline{AD} < \overline{AB} = \overline{BD} = \overline{DC}$. Ferner gilt nach dem Hauptähnlichkeitssatz:

$\triangle ADB \sim \triangle ABC$ und daher

$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AC}$, also

$\overline{AD} : \overline{DC} = \overline{DC} : \overline{AC}$, w.z.b.w.

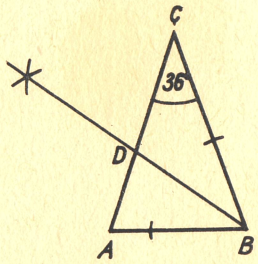


Abb. L 1036