A 11/12;I XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung</u>: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1231) Die in vollen Lebensjahren gerechneten Altersangaben einer Familie sollen folgende Bedingungen erfüllen:
Vor zehn Jahren war der Vater so alt wie seine beiden Kinder zusammen. Vor einigen vollen Jahrzehnten war er achtma so alt wie sein Sohn, während gleichzeitig seine Tochter dreimal so alt war wie ihr Bruder. Der Altersunterschied zwischen Vater und Tochter beträgt mehr als 20 Jahre und zwischen Vater und Sohn weniger als 40 Jahre.
Man ermittle für das jetzige Alter von Vater, Tochter und Sohn alle Angaben, die diesen Bedingungen entsprechen.

1232) Man beweise, daß die Ungleichung

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} < \sqrt[m]{a^m + b^m}$$

für alle positiven reellen Zahlen a, b und alle natürlichen Zahlen m, n mit $n > m$ gilt.

1233) Es sei V = ABCD ein beliebiges (konvexes oder nichtkonvexes) nicht überschlagenes ebenes Viereck.
Ferner seien A', B', C', D' diejenigen Punkte, für die die Vierecke ABA'D, ABCB', C'BCD, AD'CD Parallelogramme sind.
Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen folgende Aussage gilt:
Dann und nur dann, wenn V nichtkonvex ist, liegen alle vier Punkte A', B', C', D' außerhalb V.

30 05 62-1(52) 1.65 - 1173

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

<u>Achtung</u>: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1234) Gegeben sei ein nicht notwendig regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten P_1, P_2, P_3 und P_4.

Wir betrachten 4 Kugeln K_i $(i = 1, \ldots, 4)$ mit P_i als Mittelpunkt von K_i. Man beweise, daß die Forderung, derartige Kugeln sollen sich paarweise von außen berühren, genau dann erfüllbar ist, wenn

$$\overline{P_1P_2} + \overline{P_3P_4} = \overline{P_1P_3} + \overline{P_2P_4} = \overline{P_1P_4} + \overline{P_2P_3} \text{ gilt.}$$

1235) Die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks ABC seien $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{4}$. Man beweise: Sind α, β und γ die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks, so hat die Gleichung $x\sin\alpha + y\sin\beta + z\sin\gamma = 0$ als einzige Lösung im Bereich aller Tripel ganzer Zahlen das Zahlentripel $(x;y;z) = (0;0;0)$.

Von den folgenden Aufgaben 1236 A und 1236 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

1236 A) Eine Menge G von Elementen u, v, w, ... heißt genau dann eine Gruppe, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

[1] In G ist eine Operation definiert, d. h. jedem Paar (u,v) von Elementen u und v aus G ist eindeutig ein Element w aus G zugeordnet, wofür man $u \circ v = w$ schreibt.

[2] Diese Operation ist assoziativ, d. h. für alle Elemente u, v, w aus G gilt $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.

[3] Zu jedem Paar von Elementen u und v aus G existiert mindestens ein Element x aus G, so daß $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus G, so daß $y \circ u = v$ gilt.
Es sei P die Menge aller reellen Zahlen. Für je zwei Elemente a, b aus P ist durch $a \circ b = a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}$ eine Operation definiert.
Man beweise, daß die Menge P mit dieser Operation eine Gruppe ist.

1236 B) $\mathfrak{M}$ sei die Menge aller Punkte P (x,y) eines ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems, wobei x, y ganzrationale Zahlen seien, für die $0 \leqq x \leqq 4$ und $0 \leqq y \leqq 4$ gilt.
Man ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei beliebiger Auswahl zweier verschiedener Punkte aus $\mathfrak{M}$ der Abstand dieser beiden Punkte eine ganzrationale Maßzahl besitzt (Maßeinheit sei die Einheit des Koordinatensystems).

<u>Anmerkung</u>: Wenn n die Anzahl der verschiedenen Auswahlmöglichkeiten zweier Punkte und m die Anzahl derjenigen Auswahlmöglichkeiten ist, bei denen der Abstand eine ganzrationale Maßzahl besitzt, so nennt man den Quotienten $\frac{m}{n}$ die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit. Dabei heißen zwei Auswahlmöglichkeiten genau dann verschieden, wenn die bei ihnen ausgewählten (aus je zwei Punkten bestehenden) Mengen verschieden sind.

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1231) Lösung: 5 Punkte

Angenommen, die Angabe eines Alters des Vaters von x Jahren, der Tochter von y Jahren und des Sohnes von z Jahren entspreche den Bedingungen der Aufgabe. Die Aussage über den 10 Jahre zurückliegenden Zeitpunkt führt dann auf die Gleichung

$x - 10 = (y - 10) + (z - 10)$, also $x + 10 = y + z$ (1).

Die Aussagen über den Zeitpunkt vor einigen Jahrzehnten, also vor 10n Jahren (n natürliche Zahl, $n > 1$) führen auf die Gleichungen

$x - 10n = 8(z - 10n)$ (2) und $y - 10n = 3(z - 10n)$ (3).

Ferner gilt $x - y > 20$ (4) und $x - z < 40$ (5).

Aus (1), (2), (3) ergibt sich

$x = 30n - 20$; $y = \frac{35}{2}n - \frac{15}{2}$; $z = \frac{25}{2}n - \frac{5}{2}$.

Hieraus und aus (4) folgt $\frac{25}{2}n - \frac{25}{2} > 20$, also $n > \frac{65}{25} > 2$; aus (5) folgt $\frac{35}{2}n - \frac{35}{2} < 40$, also $n < \frac{115}{35} < 4$. Daher ergibt sich $n = 3$ und somit $x = 70$, $y = 45$, $z = 35$.

Also können nur die Angaben, der Vater sei 70 Jahre, die Tochter 45 Jahre und der Sohn 35 Jahre alt, den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

In der Tat ist das der Fall; denn nach ihnen war der Vater vor zehn Jahren 60 Jahre, die Kinder 35 bzw. 25 Jahre alt, der Vater also so alt wie die Kinder zusammen. Ferner war vor 3 Jahrzehnten der Sohn 5 Jahre und der Vater 40 Jahre alt, also achtmal so alt wie sein Sohn. Gleichzeitig war damals die Tochter 15 Jahre, also dreimal so alt wie ihr

30 05 62-1(52) 0.65 - 1173

Bruder. Schließlich beträgt der Altersunterschied zwischen Vater und Tochter 25 Jahre, also mehr als 20 Jahre, und zwischen Vater und Sohn 35 Jahre, also weniger als 40 Jahre. Daher sind alle Bedingungen erfüllt.

1232) <u>Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

O.B.d.A. sei $a \leqq b$. Ferner sei $x = \frac{a}{b}$ gesetzt.

Dann gilt $(0<)x \leqq 1$ und somit wegen $n > m > 0$

$x^n \leqq x^m$,

also $(x^n + 1)^m \leqq (x^m + 1)^m < (x^m + 1)^n$; d. h.

$$\left(\frac{a^n + b^n}{b^n}\right)^m < \left(\frac{a^m + b^m}{b^m}\right)^n, \quad \text{also } (a^n + b^n)^m < (a^m + b^m)^n$$

und daher wegen $\frac{1}{mn} > 0$

$$(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} < (a^m + b^m)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{w.z.b.w..}$$

1233) <u>Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

(I) Sei V nichtkonvex, o.B.d.A. an der Ecke C einspringend.
Sei g die Gerade durch B, D; sei H diejenige durch g begrenzte Halbebene, in der A und C liegen.
Dann liegt V ganz in H, nicht aber A' und C', da die Parallelogramme ABA'D, C'BCD die Strecke BD als Diagonale haben.

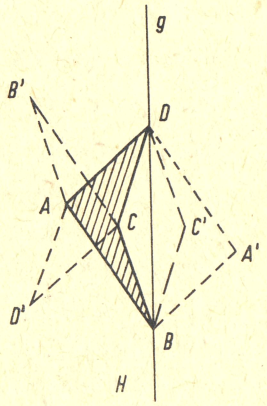

Abb. L 1233

Somit liegen A', C' außerhalb V. Da ferner der Innenwinkel von V bei C größer als 180° ist, gilt

$\overline{\sphericalangle BAD} + \overline{\sphericalangle ABC} < 180^\circ$, also $\overline{\sphericalangle BAB'} = 180^\circ - \overline{\sphericalangle ABC} > \overline{\sphericalangle BAD}$.

Somit liegt B' außerhalb $\triangle ABD$ und daher erst recht außerhalb V.

Ebenso folgt unter Vertauschung von B, B' mit D, D', daß D' außerhalb V liegt.

(II) Sei V konvex.

Die Größen der Innenwinkel von V bei A, B, C, D seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Indem man nötigenfalls A, B, C, D der Reihe nach in C, D, A, B umbenennt, kann man

(1) $\alpha + \delta \geqq \beta + \gamma$

erreichen. Indem man die nun mit A, B, C, D bezeichneten Punkte nötigenfalls der Reihe nach in D, C, B, A umbenennt (wobei (1) erhalten bleibt), kann man zusätzlich

(2) $\alpha + \beta \geqq \gamma + \delta$

erreichen.

Aus (1) folgt $\alpha + \delta \geqq 360^\circ - (\alpha + \delta)$, also

$\alpha + \delta \geqq 180^\circ = \alpha + \overline{\sphericalangle ADA'}$, also

$\overline{\sphericalangle ADC} \geqq \overline{\sphericalangle ADA'}$.

Ebenso folgt aus (2) unter Vertauschung von B, B' mit D, D'

$\overline{\sphericalangle ABC} \geqq \overline{\sphericalangle ABA'}$.

Die Strahlen aus D und B durch A' verlaufen daher in das Innere oder längs eines Schenkels von $\sphericalangle ADC$ bzw. von $\sphericalangle ABC$. Ihr Schnittpunkt A' liegt somit im Innern oder auf dem Rand von V.

Unter (I) wurde nachgewiesen, daß, wenn V nichtkonvex ist, alle Punkte A', B', C', D' außerhalb V liegen.

Unter (II) wurde nachgewiesen, daß, wenn V konvex ist, mindestens einer der Punkte A', B', C', D' im Innern oder auf dem Rand von V liegt.

Daraus folgt, daß genau dann alle vier Punkte A', B', C', D' außerhalb liegen, wenn V nichtkonvex ist, w.z.b.w..

Ein anderer Beweis zu (II) geht so vor, daß man durch geeignete Wahl der Bezeichnungen $\overline{\triangle ABD} \leqq \overline{\triangle ABC}$ *) und $\overline{\triangle ABD} \leqq \overline{\triangle ACD}$ erreicht. Dann liegt A' in demjenigen Parallelogramm P, das von den Geraden durch A, B und durch A, D sowie ihren Parallelen durch C gebildet wird. Hieraus schließt man durch Betrachtung der Teilparallelogramme, in die P von den Seitenparallelen durch A' zerlegt wird, daß A' in V liegt.

---

*) $\overline{\triangle ABC}$ bedeutet den Flächeninhalt des Dreiecks ABC

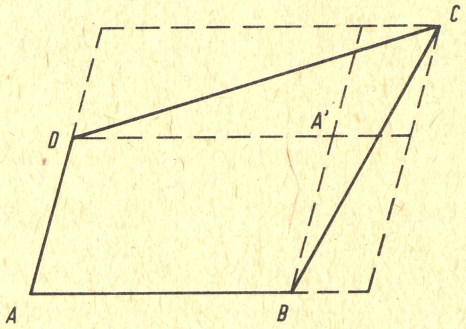

Abb. L 1233a

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 11/12 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1234) Lösung: 6 Punkte

(I) Wenn vier derartige Kugeln existieren, die sich paarweise berühren, so liegt der Berührungspunkt der Kugeln K_i und K_j ($i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, 4$) auf der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von K_i und K_j, also auf P_iP_j. Daher muß gelten $r_i + r_j = \overline{P_iP_j}$ (1), wobei r_i der Radius von K_i und r_j der Radius von K_j seien.

Aus dem Gleichungssystem (1) erhält man

$$\sum_{i=1}^{4} r_i = \overline{P_1P_2} + \overline{P_3P_4} = \overline{P_1P_3} + \overline{P_2P_4} = \overline{P_1P_4} + \overline{P_2P_3} \qquad (2)$$

Damit ist dieser Teil des Beweises beendet.

(II) Wenn (2) gilt, so zeigt man, daß das Gleichungssystem (1 positive Lösungen $r_1, \ldots, r_4$ hat:
Angenommen, $r_1, \ldots, r_4$ seien eine Lösung. Der halbe Umfang des Seitendreiecks, das P_i nicht enthält, sei s_i ($i = 1, \ldots, 4$).

Aus (1) und (2) ergibt sich dann:

$$3r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \overline{P_1P_2} + \overline{P_1P_3} + \overline{P_1P_4}\text{, also}$$

$$2r_1 = \overline{P_1P_2} + \overline{P_1P_3} + \overline{P_1P_4} - \sum_{i=1}^{4} r_i, \quad \text{d. h.}$$

$$r_1 = s_2 - \overline{P_3P_4} = s_3 - \overline{P_2P_4} = s_4 - \overline{P_2P_3} \quad \text{und entsprechend}$$

$$r_2 = s_1 - \overline{P_3P_4} = s_3 - \overline{P_1P_4} = s_4 - \overline{P_1P_3}$$

$$r_3 = s_1 - \overline{P_2P_4} = s_2 - \overline{P_1P_4} = s_4 - \overline{P_1P_2}$$

$$r_4 = s_1 - \overline{P_2P_3} = s_2 - \overline{P_1P_3} = s_3 - \overline{P_1P_2}$$

Daher können nur diese r_i das System (1) lösen. Sie lösen es in der Tat; denn für sie ist wegen (2)

$$r_1 + r_2 = \frac{1}{2}(\overline{P_1P_3} + \overline{P_1P_4} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_2P_4} - 2\,\overline{P_3P_4}) = \overline{P_1P_2},$$

und entsprechend sind auch die übrigen Gleichungen (1) erfüllt.

Wegen der Dreiecksungleichung haben die genannten r_i auch die Eigenschaft $r_i > 0$ $(i = 1, \ldots, 4)$.

Die Kugeln K_i um P_i mit diesen r_i als Radien $(i = 1, 2, 3, 4)$ berühren sich nun wegen (1) paarweise von außen. Damit ist auch dieser Teil des Beweises erbracht.

1235) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Es seien o.B.d.A. $\sqrt{2}$ die Maßzahl der Streckenlänge $\overline{BC}$, $\sqrt{3}$ die der Streckenlänge $\overline{AC}$ und $\sqrt{4}$ die der Streckenlänge $\overline{AB}$. Ferner seien α die Größe des Winkels CAB, β die Größe des Winkels ABC und γ die Größe des Winkels BCA.

Ist d der Durchmesser des umbeschriebenen Kreises des Dreiecks ABC, so gilt auf Grund des Sinussatzes der ebenen Trigonometrie

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{d}, \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{d}, \quad \sin\gamma = \frac{2}{d}.$$

Folglich ist die gegebene Gleichung äquivalent mit der Gleichung

$$x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + 2z = 0. \qquad (1)$$

Angenommen, es seien x, y und z ganze Zahlen derart, daß das Tripel (x;y;z) eine Lösung der Gleichung (1) darstellt. Dann gilt $2xy\sqrt{6} + 2x^2 + 3y^2 = 4z^2$, also

$$2xy\sqrt{6} = 4z^2 - 2x^2 - 3y^2.$$

Da x, y und z ganze Zahlen sind, muß x oder y gleich Null sein, weil sonst $\sqrt{6}$ rational sein müßte.

Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so folgt wegen der Irrationalität von $\sqrt{3}$ bzw. $\sqrt{2}$ auch auf Grund von (1) $x = y = z = 0$.

Offensichtlich erfüllt das Zahlentripel (0;0;0) die Gleichung (1). Daher ist es das einzige ganzzahlige Lösungstripel dieser Gleichung und damit auch der gegebenen Gleichung.

1236) <u>Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Es ist zu zeigen, daß die gegebene Operation jeder der Bedingungen [1], [2], [3] genügt.

[1] ist erfüllt, da mit $a \in P$, $b \in P$ stets

$a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}$ eine (eindeutig bestimmte) reelle Zahl ist.

Zu [2]:

Wegen $(a \circ b) \circ c = (a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1})\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1})^2+1}$,

$$a \circ (b \circ c) = a\sqrt{(b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{b^2+1})^2+1}+(b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{b^2+1})\sqrt{a^2+1}$$

gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ genau dann, wenn jede der folgenden Relationen erfüllt ist:

$$(1)\quad a\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)} - a\sqrt{(b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{b^2+1})^2+1}$$
$$= c\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} - c\sqrt{(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1})^2+1},$$

$$(2)\quad a\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)} - a\sqrt{\left[\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)}+bc\right]^2}$$
$$= c\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} - c\sqrt{\left[\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}+ab\right]^2},$$

(Es gilt nämlich

$$(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1})^2+1 = a^2(b^2+1)+b^2(a^2+1)+1+2ab\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$$
$$= (a^2+1)(b^2+1)+2ab\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}+a^2b^2$$
$$= \left[\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}+ab\right]^2.)$$

(3) $a\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)} - a\left|\sqrt{(b^2+1(c^2+1)} + bc\right|$

$$= c\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} - c\left|\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} + ab\right| .$$

Die Relation (3) ist für alle reellen a, b, c erfüllt, weil für beliebige reelle Zahlen ,x,y stets

$(x^2+1)(y^2+1) > x^2y^2$ also

$\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} > |xy|$ und folglich

(4) $\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} \pm xy > 0$ ausfällt.

Also ist auch [2] erfüllt.

Zu [3]: Wegen $a \circ x = x \circ a$ für alle $a \in P$, $x \in P$ genügt es zu zeigen, daß für alle reellen a, b die Gleichung

(5) $a \circ x = b$ stets eine Lösung hat.

Die Relation (5) ist äquivalent mit

(6) $a\sqrt{x^2 + 1} + x\sqrt{a^2 + 1} = b.$

Die Zahl x kann nur dann Lösung von (6) sein, wenn

(7) $a^2(x^2 + 1) = (b - x\sqrt{a^2 + 1})^2$ gilt.

Genügt x der Gleichung (7), so muß x eine der beiden Zahlen x_1 oder x_2 mit

$x_{1,2} = b\sqrt{a^2 + 1} \pm a\sqrt{b^2 + 1}$ sein.

Für $x = x_2 = b\sqrt{a^2+1} - a\sqrt{b^2+1}$ ergibt sich:

$$a \circ x = a \circ x_2 = a\sqrt{(b\sqrt{a^2+1} - a\sqrt{b^2+1})^2+1} + \sqrt{a^2+1}\,(b\sqrt{a^2+1} - a\sqrt{b^2+1})$$

$$= a\sqrt{(\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} - ab)^2} + a\left(ab - \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}\right) + b = b,$$

letzteres wegen (4).

($x = x_1 = b\sqrt{a^2+1} + a\sqrt{b^2+1}$ ist übrigens genau dann Lösung von (6), d. h. von (5), wenn $a = 0$, also $x_1 = x_2$ ist.)

<u>Bemerkung</u>: Die Menge P mit der in der Aufgabe gegebenen Operation ist das isomorphe Bild von P mit der Addition als Gruppenoperation bei der Abbildung durch

$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (sinh x sog. Hyperbelsinus, sinus hyperbolicus);

denn es gilt

$$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha \cosh\beta + \sinh\beta \cosh\alpha$$
$$= \sinh\alpha\sqrt{\sinh^2\beta + 1} + \sinh\beta\sqrt{\sinh^2\alpha + 1}$$

mit $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (cosh sog. Hyperbelcosinus, cosinus hyperbolicus).

Wenn ein Teilnehmer diesen Lösungsweg wählt, so muß er das Additionstheorem nachweisen und

<u>entweder</u>: den Satz zitieren, daß jedes isomorphe Bild einer Gruppe eine Gruppe ist,

<u>oder</u>: diesen Satz für den vorliegenden Fall ad hoc beweisen, also zeigen, wie sich [1], [2], [3] aus der entsprechenden Eigenschaften für P mit der Addition als Gruppenoperation ergeben:

$$(\sinh\alpha \circ \sinh\beta)\circ\sinh\gamma = \sinh(\alpha+\beta)\circ\sinh\gamma$$
$$= \sinh((\alpha+\beta)+\gamma)$$
$$= \sinh(\alpha+(\beta+\gamma) = \sinh\alpha\circ\sinh(\beta+\gamma)$$
$$= \sinh\alpha\circ(\sinh\beta\circ\sin\gamma).$$

$\sinh\alpha\circ\sinh\xi = \sinh\beta$ hat die Lösung

$\sinh\xi = \sinh(\beta-\alpha)$; denn ...

1236) **Lösung:** **8 Punkte**

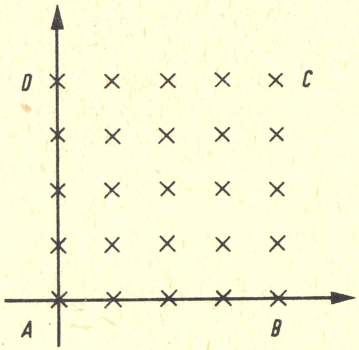

Abb. L. 1236 B

Die Punkte von $\mathfrak{M}$ sind die "ganzzahligen Gitterpunkte", die im Innern oder auf dem Rande des Quadrats ABCD liegen (siehe Abb. L 1236 B). Ihre Anzahl beträgt 25. Daher gibt es genau $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$ verschiedene Auswahlmöglichkeiten für Punktepaare. Der Abstand zweier Punkte der Menge $\mathfrak{M}$ hat sicher dann eine ganzzahlige Maßzahl, wenn beide Punkte auf ein und derselben Parallelen zu einer der beiden Koordinatenachsen liegen. Da auf jeder dieser 10 Parallelen je 5 verschiedene Punkte liegen, erhält man

$$10 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 100 \quad \text{derartige Auswahlmöglichkeiten.}$$

Es seien nun $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ zwei Punkte von $\mathfrak{M}$, die nicht auf ein und derselben Parallelen zu einer der beiden Koordinatenachsen liegen,
Die Maßzahl d ihres Abstandes ist dann nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad .$$

Nun sind $(x_2 - x_1)^2$ bzw. $(y_2 - y_1)^2$ je eine der Zahlen 1, 4, 9 bzw. 16. Daher wird d genau dann ganzrational, wenn

entweder $|x_2 - x_1| = 3$ und $|y_2 - y_1| = 4$

oder $|x_2 - x_1| = 4$ und $|y_2 - y_1| = 3$ ist.

Das trifft nur für solche Punkte P_1, P_2 zu, die auf verschiedenen Seiten des Quadrats ABCD liegen, wobei genau einer von ihnen Eckpunkt und keiner von ihnen Mittelpunkt einer Quadratseite ist. Die Punkte können also nur die Koordinaten (0,0), (0,1), (1,0), (0,3), (0,4), (1,4), (3,4), (4,4), (4,3), (3,0), (4,0), (4,1) haben,

Von ihnen genügen jeweils die Punktpaare mit den Koordinaten (0,0), (3,4) bzw. (0,0), (4,3) bzw. (4,4), (0,1) bzw. (4,4), (1,0) bzw. (0,4), 3,0) bzw. (0,4), (4,1) bzw. (4,0), (0,3) bzw. (4,0), (1,4) und keine anderen den oben angegebenen Bedingungen. Das sind genau 8 weitere Auswahlmöglichkeiten mit ganzrationalen Maßzahlen.
Also beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{100 + 8}{300} = 0{,}36.$$